Ю. Н. Макарычев
Н. Г. Миндюк
К. И. Нешков
И. Е. Феоктистов

АЛГЕБРА

8

Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений

10-е издание, исправленное

Рекомендовано Министерством образования и науки Российской Федерации

ИЗДАТЕЛЬСТВО МНЕМОЗИНА

Москва 2010

УДК 373.167.1:512
ББК 22.141я721+22.14я721.6
М15

На учебник получены положительные заключения Российской академии наук (№ 10106—5215/9 от 31.10.2007) и Российской академии образования (№ 01—657/5/7д от 29.10.2007)

Макарычев Ю. Н.

М15 Алгебра. 8 класс : учеб. для учащихся общеобразоват. учреждений / Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешков, И. Е. Феоктистов. — 10-е изд., испр. — М. : Мнемозина, 2010. — 384 с. : ил.

ISBN 978-5-346-01446-1

Данный учебник предназначен для углубленного изучения алгебры в 8 классе и входит в комплект из трех книг: «Алгебра–7», «Алгебра–8» и «Алгебра–9». Его содержание полностью соответствует современным образовательным стандартам, а особенностями являются расширение и углубление традиционных учебных тем за счет теоретико-множественной, вероятностно-статистической и историко-культурной линий. В учебнике представлен большой набор разнообразных по тематике и уровню сложности упражнений.

Главы 1, 6, 7 написаны Ю. Н. Макарычевым; главы 2, 5, а также § 7, 8 — Н. Г. Миндюк; глава 4, а также § 6 — К. И. Нешковым; п. 19, 29, 42, исторические сведения, методический комментарий для учителя, ряд упражнений развивающего характера по всем темам курса — И. Е. Феоктистовым.

УДК 373.167.1:512
ББК 22.141я721+22.14я721.6

Учебное издание

Макарычев Юрий Николаевич, **Миндюк** Нора Григорьевна, **Нешков** Константин Иванович, **Феоктистов** Илья Евгеньевич

АЛГЕБРА
8 класс
УЧЕБНИК
для учащихся общеобразовательных учреждений

Санитарно-эпидемиологическое заключение
№ 77.99.60.953.Д.003577.04.09 от 06.04.2009.
Формат 60×90 1/16. Бумага офсетная № 1. Гарнитура «Школьная».
Печать офсетная. Усл. печ. л. 24,0. Тираж 25 000 экз. Заказ № 1001380.

Издательство «Мнемозина». 105043, Москва, ул. 6-я Парковая, 29 б.
Тел.: 8 (499) 367 5418, 367 5627, 367 6781; факс: 8 (499) 165 9218.
E-mail: ioc@mnemozina.ru www.mnemozina.ru

Магазин «Мнемозина»
(розничная и мелкооптовая продажа книг, «КНИГА — ПОЧТОЙ»).
105043, Москва, ул. 6-я Парковая, 29б.
Тел./факс: 8 (495) 783 8284; тел.: 8 (495) 783 8285. E-mail: magazin@mnemozina.ru

Торговый дом «Мнемозина» (оптовая продажа книг).
Тел./факс: 8 (495) 665 6031 (многоканальный). E-mail: td@mnemozina.ru

Отпечатано в полном соответствии с качеством предоставленного электронного оригинал-макета в ОАО «Ярославский полиграфкомбинат» 150049, Ярославль, ул. Свободы, 97

ISBN 978-5-346-01446-1

Предисловие для учащихся

Дорогие восьмиклассники! В этом году вы продолжите изучение курса алгебры. Вам предстоит познакомиться с рациональными выражениями, научиться решать квадратные и дробно-рациональные уравнения, линейные неравенства и их системы. На уроках вы будете не только строить графики функций, но и выполнять их преобразования — сдвиг, симметрию относительно прямой и относительно точки. Вы узнаете об иррациональных числах, об арифметических квадратных корнях и их свойствах, о степени с отрицательным показателем и о многом другом. Все это поможет вам при изучении геометрии, физики, химии и других школьных предметов.

Данный учебник предназначен для углубленного изучения алгебры. Вам нужно будет внимательно читать объяснительные тексты учебника, выполнять различные упражнения, среди которых немало задач на смекалку. После прочтения каждого параграфа очень полезно отвечать на контрольные вопросы. В этом учебном году вам предстоит узнать много нового, полезного и интересного, приобрести важные навыки в работе с алгебраическими выражениями, уравнениями, неравенствами, функциями. Все это необходимо для успешного обучения в школе, для сдачи экзамена по алгебре за курс основной школы в 9-м классе, но не только для этого. Те мыслительные операции, которым вы научитесь на уроках алгебры, будут помогать успешно изучать и другие учебные дисциплины. Как сказал великий русский ученый М. В. Ломоносов, «математику уже затем изучать следует, что она ум в порядок приводит».

Авторы надеются, что изучение алгебры по этому учебнику будет для вас интересным и полезным, позволит увидеть алгебру не только как учебный школьный предмет, но и как средство самовоспитания, развития своих способностей, поможет рассматривать математику как часть общечеловеческой культуры.

ГЛАВА 1

ДРОБИ

§ 1. ДРОБИ И ИХ СВОЙСТВА

1. Числовые дроби и дроби, содержащие переменные

Дробью называют выражение вида $\frac{a}{b}$, где буквами обозначены числовые выражения или выражения, содержащие переменные. Выражение a называют *числителем* дроби $\frac{a}{b}$, а выражение b — ее *знаменателем*.

Обозначение дроби в виде $\frac{a}{b}$ впервые появилось в «Книге абака» (1202 г.) итальянского математика Леонардо Фибоначчи, а широкое распространение в Европе данная запись получила после появления работ французского математика Франсуа Виета.

Примерами числовых дробей являются дроби:

$$\frac{2}{7}, \qquad \frac{3{,}5+2{,}3\cdot 5}{-8}, \qquad \frac{1{,}6}{\frac{4}{5}-\frac{2}{3}}.$$

Леонардо Фибоначчи (Пизанский), (1180—1240), итальянский математик; в своем главном труде «Книга абака» (1202 г.) впервые систематически изложил достижения арабской математики; ввел в рассмотрение первую возвратную последовательность чисел — так называемый ряд Фибоначчи.

Примерами дробей с переменными являются дроби:

$$\frac{3}{x}, \qquad \frac{y^2-y+12}{y+8}, \qquad \frac{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}{m-n}.$$

Чтобы найти значение дроби, надо найти значение ее числителя и значение знаменателя и первый результат разделить на второй.

Найдем, например, значение дроби $\frac{48{,}2+21{,}8}{15{,}6-3{,}2\cdot 4}$:

$$\frac{48{,}2+21{,}8}{15{,}6-3{,}2\cdot 4}=\frac{70}{15{,}6-12{,}8}=\frac{70}{2{,}8}=\frac{700}{28}=\frac{100}{4}=25.$$

Если окажется, что знаменатель дроби равен нулю, то такая дробь *не имеет смысла.*

Например, дробь $\frac{10}{14-2\cdot 7}$ не имеет смысла, так как ее знаменатель $14-2\cdot 7$ равен 0, а делить на нуль нельзя.

Значение дроби, содержащей переменные, зависит от значений этих переменных.

Например, дробь $\frac{x+5}{x-3}$ при $x=2$ принимает значение, равное -7, при $x=8$ значение дроби равно 2,6. При $x=3$ дробь *не имеет смысла*, так как при этом значении x она обращается в числовую дробь, знаменатель которой равен 0.

Число 3 — единственное значение x, при котором дробь $\frac{x+5}{x-3}$ не имеет смысла. При всех остальных значениях x дробь имеет определенное значение. Говорят, что числа, отличные от 3, — *допустимые значения переменной* x, а множество всех чисел, отличных от 3, называют *областью допустимых значений переменной в выражении* $\frac{x+5}{x-3}$.

Для дроби $\frac{x+y}{x-y}$, которая содержит две переменные, допустимыми значениями являются все пары чисел $(x; y)$, в которых $x \neq y$.

Для дроби $\frac{1}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}$ допустимыми являются все числа, у которых $a \neq 0$, $b \neq 0$ и $a \neq b$.

Заметим, что для таких выражений, как $\frac{1}{x-x}$, множество допустимых значений переменной x — пустое множество. Они не имеют смысла при любых значениях переменных, и мы исключаем их из дальнейшего рассмотрения.

П р и м е р 1. Найдем допустимые значения переменной для дроби $\frac{x}{x^2-25}$.

Допустимыми значениями переменной для этой дроби являются значения x, при которых знаменатель x^2-25 отличен от нуля. Чтобы их найти, надо решить уравнение $x^2-25=0$.

Для решения уравнения $x^2-25=0$ разложим его левую часть на множители. Получим: $(x-5)(x+5)=0$.

Отсюда $x=5$ или $x=-5$.

Значит, для дроби $\frac{x}{x^2-25}$ допустимыми значениями переменной являются все числа, отличные от -5 и 5.

П р и м е р 2. Найдем множество целых чисел, при которых дробь $\frac{13}{n+3}$ принимает целые значения.

Число 13 — простое. Поэтому оно имеет четыре целых делителя: -13; -1; 1; 13. Значит, знаменателем дроби может быть число -13; -1; 1 или 13. Решив уравнения $n+3=-13$, $n+3=-1$, $n+3=1$, $n+3=13$, найдем множество целых чисел, при которых данная дробь принимает целые значения.

О т в е т: $\{-16; -4; -2; 10\}$.

П р и м е р 3. Докажем тождество

$$\frac{c^3-5c+2}{c^2+2c-1}=c-2.$$

Так как черта дроби представляет собой знак деления, то для доказательства тождества воспользуемся определением частного: частным от деления числа a на число b ($b \neq 0$) называется такое число k, что $a = bk$. Значит, для доказательства тождества достаточно показать, что при любых значениях c верно равенство

$$(c^2+2c-1)(c-2)=c^3-5c+2.$$

Имеем:

$(c^2+2c-1)(c-2)=c^3+2c^2-c-2c^2-4c+2=c^3-5c+2.$

Тождество доказано.

В этой главе мы будем заниматься преобразованиями *рациональных выражений.*

Рациональными выражениями называют выражения, составленные из чисел и переменных с помощью действий сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в степень.

Рациональные выражения делятся на два класса: *целые* и *дробные.*

Целым называется рациональное выражение, которое не содержит операции деления на выражение с переменными.

Дробным называется рациональное выражение, которое не является целым, т. е. содержит операцию деления на выражение с переменными.

Например, выражения

$$\frac{4}{9}\cdot 75,\quad 5a^2,\quad x^2-7x+6,\quad (b+c)^2-b(b-2c),\quad \frac{y-7x}{15} \text{ —}$$

целые рациональные выражения, а выражения

$$\frac{x}{x+y},\quad \frac{a+2}{a-8}+3,\quad \frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{c} \text{ —}$$

дробные рациональные выражения.

Заметим, что выражения $|x|$, $a-|2b|$ и вообще выражения, содержащие переменную под знаком модуля, не являются рациональными выражениями. В дальнейшем вы познакомитесь и с другими выражениями, которые не являются рациональными выражениями.

Следует обратить внимание на существенное различие в понятиях *дробь* и *дробное выражение.* Дробь может быть как дробным, так и целым выражением, а дробное выражение может и не быть дробью.

Например, $\frac{a}{5}$ и $\frac{5}{a}$ — это дроби. Но $\frac{a}{5}$ — целое выражение, а $\frac{5}{a}$ — дробное выражение. Выражение $(x+6) : y$ не является дробью, но это выражение — дробное.

Добавим, что дробь равна нулю тогда и только тогда, когда она имеет смысл, а ее числитель равен нулю, т. е. $\frac{a}{b}=0$, если $a=0$ и $b\neq 0$.

1. Какие из выражений

$$\frac{x}{9},\quad 3\frac{1}{8},\quad \frac{7}{a+b},\quad \frac{1}{2}a,\quad \frac{x}{y}+2,\quad \frac{a^2-b^2}{ab}$$

являются дробями?

2. Представьте в виде дроби выражение:

а) $1\frac{2}{7}$; в) $-0{,}75$; д) $0{,}2x$; ж) $(a+b):3$;

б) $3\frac{2}{5}$; г) $0{,}37:1{,}11$; е) $2\frac{3}{7}y$; з) $(x-5):(y+5)$.

3. Какие из выражений

$$3a^2b^4,\ \left(\frac{1}{3}x+y\right)\left(\frac{1}{3}x-y\right),\ \frac{4a-b}{2a}+5,\ \frac{|x|+1}{x^2-5},\ \frac{x+2y}{10},$$

$$12xy-\frac{7}{8},\ \frac{c}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}},\ (x^2-8xy-y^2):x$$

являются целыми и какие дробными?

4. Запишите частное в виде дроби:

а) $5:(x+3)$; в) $(a+25):7$;

б) $(y-1):(y^2+1)$; г) $(a^2+a+1):(b^2-b+7)$.

5. Вычислите:

а) $\dfrac{239^2-187^2}{426}$; в) $\dfrac{3{,}7^2+6{,}3\cdot 3{,}7}{111}$;

б) $\dfrac{17^2+442+13^2}{30}$; г) $\dfrac{8{,}3^2-83\cdot 0{,}13}{0{,}7}$.

6. Найдите значение дроби $\dfrac{x^2+5x-24}{x^2+5x-6}$, если:

а) $x=7$; в) $x=0$; д) $x=0{,}5$;

б) $x=3$; г) $x=-2$; е) $x=1{,}9$.

7. По какому признаку из множества обыкновенных дробей вида $\frac{1}{n}$, где $n \leqslant 20$, выделено подмножество:

а) $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{10}, \frac{1}{12}, \frac{1}{14}, \frac{1}{16}, \frac{1}{18}, \frac{1}{20}\right\}$;

б) $\left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{9}, \frac{1}{12}, \frac{1}{15}, \frac{1}{18}\right\}$;

в) $\left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \frac{1}{11}, \frac{1}{13}, \frac{1}{15}, \frac{1}{17}, \frac{1}{19}\right\}$;

г) $\left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{7}, \frac{1}{10}, \frac{1}{13}, \frac{1}{16}, \frac{1}{19}\right\}$?

8. Запишите путем перечисления элементов множество:

$$A = \left\{\frac{a}{15} \,\middle|\, a \in N,\ a < 15\right\}.$$

Выделите из множества A подмножество:

а) несократимых дробей; б) сократимых дробей.

9. Расстояние между пристанями 24 км. Моторная лодка имеет собственную скорость v км/ч, а скорость течения реки равна 2 км/ч. Сколько времени t затратит на весь путь моторная лодка, двигаясь против течения реки? Найдите t, если:

а) $v = 38$ км/ч; б) $v = 18$ км/ч.

10. Вкладчик положил в сбербанк a рублей. Через год его вклад увеличился на b рублей. Какой процент p от вклада начисляет банк ежегодно? Выразите переменную p через a и b. Найдите значение p, если:

а) $a = 200$, $b = 40$; б) $a = 500$, $b = 30$.

11. При каких значениях переменной дробь имеет смысл:

а) $\dfrac{12}{x^2 - 81}$; б) $\dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 9x + 14}$; в) $\dfrac{x^2 - 25}{x^2 + 25}$; г) $\dfrac{1}{x - \frac{4}{x}}$?

12. Найдите допустимые значения переменной для дроби:

а) $\dfrac{3y}{|y| - 1}$; в) $\dfrac{5y - 10}{3}$; д) $\dfrac{18}{y^3 - 64y}$;

б) $\dfrac{2}{y^2 - 5|y|}$; г) $\dfrac{y}{y^2 + 2y - 3}$; е) $\dfrac{2y - 1}{(2y + 1)^3 - (8y + 4)}$.

13. Найдите область допустимых значений переменной в выражении:

а) $\dfrac{4x^2 - 1}{4}$; б) $\dfrac{4}{4x^2 - 1}$; в) $\dfrac{2xy}{x^2 - y^2}$; г) $\dfrac{x^2 - y^2}{2xy}$.

14. Найдите область определения функции:

а) $f(x) = -\dfrac{1}{x^2 - x}$; в) $\alpha(x) = \dfrac{x - x^3}{3}$;

б) $g(x) = \dfrac{x^2 - x}{1 - x}$; г) $\beta(x) = \dfrac{2x - 1}{2x^2 - x - 1}$.

15. Составьте дробное выражение с одной переменной, для которого допустимыми значениями являются:

а) все числа, кроме 5;

б) все числа, кроме -4 и 4;

в) все числа, кроме -1, 0 и 1;

г) все числа.

16. Найдите множество значений n, при которых дробь принимает целые значения:

а) $\frac{6}{n}$, где $n \in N$; в) $\frac{9}{n-5}$, где $n \in N$;

б) $\frac{5}{n}$, где $n \in Z$; г) $\frac{17}{n+2}$, где $n \in Z$.

17. При каких значениях m, где $m \in Z$, принимает целые значения дробь:

а) $\frac{7}{2m+1}$; б) $\frac{4}{3m-2}$; в) $\frac{10}{7m-3}$; г) $\frac{6}{5m+1}$?

18. При каких значениях y значение дроби равно нулю:

а) $\frac{y}{20}$; в) $\frac{y(y-9)}{3}$; д) $\frac{y^2+2y}{3y}$;

б) $\frac{y-2}{y}$; г) $\frac{y^2-36}{y^2+36}$; е) $\frac{y^2-6y+9}{y^2+3y}$?

19. При каких значениях x равна нулю дробь:

а) $\frac{4x-x^3}{4x}$; б) $\frac{4-x^2}{2x+4}$; в) $\frac{x^3-x^2+x-1}{x^3-2x^2+x-2}$; г) $\frac{4}{4-x^2}$?

20. Пользуясь определением частного, докажите тождество:

а) $\frac{m^2+3m-4}{m-1} = m+4$;

б) $\frac{a^4-7a^2+1}{a^2+3a+1} = a^2-3a+1$;

в) $\frac{a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4}{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3} = a+b$;

г) $\frac{a^4-4a^3+10a^2-12a+9}{a^2-2a+3} = (a-1)^2+2$.

Упражнения для повторения

21. Запишите путем перечисления элементов множество обыкновенных дробей с числителем, равным 1, и знаменателем b, где:

а) b — простое двузначное число, меньшее 50;
б) b — простое двузначное число, большее 50.

22. Разложите многочлен на множители:

а) $10ab + 15b^2$; в) $x^2 + xy - 3x - 3y$; д) $a^4 - 16$;
б) $27a^2 - 18ab$; г) $2xy - 5y^2 - 6x + 15y$; е) $49 - b^4$.

23. Разложите на множители выражение:

а) $x^2 - 10x + 25$; в) $(a + 1)^2 - 9a^2$; д) $x^3 + 8y^3$;
б) $y^2 + 6y + 9$; г) $b^2 - (b - 2)^2$; е) $x^3 - 27y^3$.

2. Свойства дробей

Сначала рассмотрим *основное свойство дроби*. Докажем, что равенство

$$\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc} \qquad (1)$$

верно при всех допустимых значениях переменных, т. е. является тождеством.

Пусть $\frac{a}{b} = k$. Тогда по определению частного $a = bk$. Умножив обе части этого равенства на c, отличное от нуля, и применив переместительное и сочетательное свойства умножения, получим, что

$$ac = (bk)c, \text{ т. е. } ac = (bc)k.$$

По определению частного, учитывая, что $bc \neq 0$, имеем:

$$\frac{ac}{bc} = k.$$

Сравнивая равенства $\frac{a}{b} = k$ и $\frac{ac}{bc} = k$, заключаем, что

$$\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}.$$

Мы доказали, что при всех допустимых значениях переменных верно равенство (1), т. е. это равенство является тождеством.

Если вместо переменных a, b и c подставить произвольные выражения, имеющие смысл и тождественно не равные нулю, то также получится тождество.

Таким образом, любая дробь (числовая или содержащая переменные) обладает следующим свойством:

если числитель и знаменатель дроби умножить на одно и то же выражение, то получится тождественно равная ей дробь.

Это свойство называют *основным свойством дроби.*

Частным случаем этого свойства (когда a, b и c — натуральные числа) является известное вам свойство: если числитель и знаменатель обыкновенной дроби умножить на одно и то же натуральное число, то значение дроби не изменится.

Основное свойство дроби позволяет привести любую дробь к некоторому новому знаменателю.

Пример 1. Приведем дробь $\frac{5}{2a^2b}$ к знаменателю $6a^2b^2$.

Это означает, что мы должны заменить ее тождественно равной ей дробью со знаменателем $6a^2b^2$.

Умножим числитель и знаменатель данной дроби на множитель $3b$ (так как $6a^2b^2 = 2a^2b \cdot 3b$):

$$\frac{5}{2a^2b} = \frac{5 \cdot 3b}{2a^2b \cdot 3b} = \frac{15b}{6a^2b^2}.$$

Множитель $3b$ называют *дополнительным множителем* к знаменателю и числителю дроби $\frac{5}{2a^2b}$.

Перепишем тождество (1) в виде

$$\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b},$$

поменяв в нем левую и правую части.

Это тождество позволяет дробь $\frac{ac}{bc}$, т. е. дробь, числитель и знаменатель которой имеют общий множитель, заменить тождественно равной дробью вида $\frac{a}{b}$. Такое преобразование называют *сокращением дроби*.

Пример 2. Сократим дроби:

$$\frac{26x}{13x^2} \quad \text{и} \quad \frac{2x^2+6xy}{7xy+21y^2}.$$

Разложим на множители числитель и знаменатель каждой дроби, затем сократим дробь на общий множитель числителя и знаменателя (если такой множитель окажется):

$\dfrac{26x}{13x^2} = \dfrac{13x \cdot 2}{13x \cdot x} = \dfrac{2}{x}$ (здесь общий множитель — одночлен $13x$);

$\dfrac{2x^2+6xy}{7xy+21y^2} = \dfrac{2x(x+3y)}{7y(x+3y)} = \dfrac{2x}{7y}$ (здесь общий множитель — двучлен $x+3y$).

Пример 3. Построим график функции $y = \dfrac{x^2-4}{x-2}$.

Область определения функции есть множество всех чисел, кроме числа 2.

Сократим дробь в правой части формулы:

$$\frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x+2.$$

Получаем формулу $y = x + 2$, где $x \neq 2$.

Графиком функции $y = x + 2$ является прямая, а графиком функции $y = x + 2$, где $x \neq 2$, — прямая с исключенной точкой (2; 4) (рис. 1).

Рассмотрим другие свойства дроби.

Если у дроби изменить знак числителя (или знаменателя) и знак перед дробью, то получится тождественно равная ей дробь.

Используя переменные, это свойство можно записать в виде тождеств:

$$\frac{-a}{b} = -\frac{a}{b}, \quad \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}. \qquad (2)$$

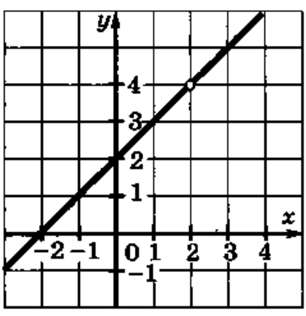


Рис. 1

Докажем тождество $\dfrac{-a}{b} = -\dfrac{a}{b}$.

Обозначим дробь $\dfrac{-a}{b}$ буквой k, т. е. $\dfrac{-a}{b} = k$. Тогда по определению частного $-a = bk$. Умножив обе части этого равенства на -1, получим $a = -bk$, или $a = -kb$.

Отсюда $-k = \dfrac{a}{b}$, т. е. $k = -\dfrac{a}{b}$.

Значит,

$$\frac{-a}{b} = -\frac{a}{b}.$$

Тождество $\frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$ может быть получено из тождества $\frac{-a}{b} = -\frac{a}{b}$, если числитель и знаменатель дроби $\frac{-a}{b}$, записанной в левой части тождества, умножить на -1.

П р и м е р 4. Найдем значение дроби

$$\frac{x^3 - 3x^2y + 4xy^2 + 3y^3}{2x^3 - x^2y - 10y^3},$$

если известно, что $\frac{5x + 8y}{7x - 8y} = 3$.

Числитель и знаменатель данной дроби — многочлены третьей степени, причем каждый член этих многочленов имеет одну и ту же степень, равную степени многочлена. Такие многочлены называют *однородными*. Если разделить числитель и знаменатель этой дроби на y^3 (или x^3), то получим выражение, значение которого зависит от $\frac{x}{y}$ $\left(\text{или } \frac{y}{x}\right)$.

Разделим числитель и знаменатель данной дроби на y^3. Получим дробь

$$\frac{\left(\frac{x}{y}\right)^3 - 3\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 4\frac{x}{y} + 3}{2\left(\frac{x}{y}\right)^3 - \left(\frac{x}{y}\right)^2 - 10}.$$

Из условия $\frac{5x + 8y}{7x - 8y} = 3$ находим значение $\frac{x}{y}$:

$5x + 8y = 3(7x - 8y)$, $5x + 8y = 21x - 24y$, $x = 2y$, $\frac{x}{y} = 2$.

Подставим это значение в преобразованную дробь. Получим:

$$\frac{2^3 - 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 + 3}{2 \cdot 2^3 - 2^2 - 10} = \frac{7}{2} = 3{,}5.$$

Пример 5. Сократим дробь $\frac{3x-xy+2y-6}{xy-3x+2y-6}$.

Разложим числитель и знаменатель на множители:

$$\frac{3x-xy+2y-6}{xy-3x+2y-6}=\frac{(3x-xy)-(6-2y)}{(xy-3x)+(2y-6)}=$$

$$=\frac{x(3-y)-2(3-y)}{x(y-3)+2(y-3)}=\frac{(3-y)(x-2)}{(y-3)(x+2)}.$$

По свойству (2) дробь $\frac{(3-y)(x-2)}{(y-3)(x+2)}$ можно заменить дробью $-\frac{(y-3)(x-2)}{(y-3)(x+2)}$ (мы изменяем знак в числителе и знак перед дробью).

Далее имеем:

$$\frac{(3-y)(x-2)}{(y-3)(x+2)}=-\frac{(y-3)(x-2)}{(y-3)(x+2)}=-\frac{x-2}{x+2}.$$

Мы рассмотрели примеры сокращения дробей, у которых числитель и знаменатель являются многочленами с целыми коэффициентами. Если числитель или знаменатель дроби не является многочленом с целыми коэффициентами, то такие дроби можно привести, используя основное свойство дроби, к дробям, числитель и знаменатель которых — многочлены с целыми коэффициентами.

Например, дробь $\frac{\frac{1}{3}y^2}{\frac{1}{4}y-1}$ можно привести к дроби $\frac{4y^2}{3y-12}$, умножив ее числитель и знаменатель на 12.

24. Приведите дробь к знаменателю $12x^2y$:

а) $\frac{1}{6x^2}$; б) $\frac{5}{3xy}$; в) $\frac{7x}{4y}$; г) $\frac{5}{12x}$.

25. Представьте двучлен $3x - y$ в виде дроби со знаменателем, равным:

а) 7; б) x; в) $9x + y$; г) $3x - y$.

26. Приведите дробь $\frac{a}{x-2}$ к знаменателю:

а) x^2-2x; в) x^2-4; д) $6-3x$; ж) $(x-2)^2$;
б) $5x-10$; г) $4-x^2$; е) x^3-8; з) $(x-2)^3$.

27. Сократите дробь:

а) $\frac{8xy}{32y}$; в) $\frac{ax^2}{2a^2x}$; д) $\frac{-21b^2y^2}{-28by}$;

б) $\frac{18ab}{27bc}$; г) $\frac{bc}{5b^2c^2}$; е) $\frac{-49a^3}{14b^3}$.

28. Сократите дробь (n — натуральное число):

а) $\frac{5a^{3n}}{2a^n}$; б) $\frac{48b^{2n-1}}{80b^{3n-1}}$; в) $\frac{17x^{n+1}}{51x^{n+4}}$; г) $\frac{91y^{3n-1}}{28y^{n+1}}$.

29. Найдите значение дроби:

а) $\frac{4^{10}}{8^7}$; б) $\frac{27^3}{9^5}$; в) $\frac{14^8}{4^4\cdot 7^7}$; г) $\frac{18^3\cdot 4^2}{12^4}$.

30. Сократите дробь:

а) $\frac{a^3(a-5)}{(a-5)}$; в) $\frac{x^3-4x}{y(x-2)}$; д) $\frac{(12a-12b)^3}{(6a-6b)^5}$;

б) $\frac{3(b+7)^4}{8(b+7)^6}$; г) $\frac{5(a-2c)^2}{2a^2-4ac}$; е) $\frac{(x-2y)^5}{(x^2-4xy+4y^2)^5}$.

31. Сократите дробь:

а) $\frac{ax-3a}{bx-3b}$; в) $\frac{3b-9c}{5b^2-15bc}$; д) $\frac{6x^2y-3xy^2}{6x^2y}$;

б) $\frac{5x+20y}{15x+60y}$; г) $\frac{8a^2+40ab}{ab+5b^2}$; е) $\frac{8ab^3}{4a^2b^2+8ab^3}$.

32. Сократите дробь:

а) $\frac{a^2-b^2}{3a+3b}$; в) $\frac{2x+4y}{x^2-4y^2}$; д) $\frac{(x-1)^2}{5x-5}$; ж) $\frac{a^2-49}{a^2-14a+49}$;

б) $\frac{x^2-9}{4x-12}$; г) $\frac{3a+15b}{a^2-25b^2}$; е) $\frac{y^2+4y+4}{y^2+2y}$; з) $\frac{b^2+10b+25}{b^2-25}$.

33. Найдите значение дроби:

а) $\dfrac{5x^2-35xy}{2xy-14y^2}$ при $x=0{,}12,\ y=0{,}4$;

б) $\dfrac{12a^2+30ab}{4a^2-25b^2}$ при $a=-0{,}5,\ b=-2{,}6$;

в) $\dfrac{a^2-8ax+16x^2}{4a^2-16ax}$ при $a=\dfrac{5}{7},\ x=\dfrac{1}{8}$;

г) $\dfrac{4b^2-9y^2}{4b^2+12by+9y^2}$ при $b=-\dfrac{1}{4},\ y=-\dfrac{5}{6}$.

34. Сократите дробь:

а) $\dfrac{27x^3+y^3}{9x^2-3xy+y^2}$;

б) $\dfrac{b^{12}+b^6+1}{b^{18}-1}$;

в) $\dfrac{ax+bx-2ay-2by}{3x-6y}$;

г) $\dfrac{10x+5y}{2ax+ay-2bx-by}$;

д) $\dfrac{b^2+2bd-by-2dy}{b^2+4bd+4d^2}$;

е) $\dfrac{9a^2-4b^2}{6ab+2b-3a-4b^2}$.

35. Сократите дробь:

а) $\dfrac{a^{2n}-b^4}{a^{n+1}-ab^2}$;

б) $\dfrac{x^{n+2}y^n+x^ny^{n+2}}{x^4y^n-y^{n+4}}$;

в) $\dfrac{x^{n+1}-2x^n-3x^{n-1}}{x^2-5x+6}$;

г) $\dfrac{b^{n+1}+7b^n+12b^{n-1}}{b^{n+2}+b^{n+1}-12b^n}$.

36. Зная, что $\dfrac{2x-7y}{y}=3$, найдите значение дроби:

а) $\dfrac{x^3-5x^2y+8xy^2-3y^3}{2x^3-8x^2y-7xy^2+22y^3}$;

б) $\dfrac{x^4+5y^4}{x^3y-x^2y^2+xy^3}$.

37. Сократите дробь:

а) $\dfrac{3(x-a)}{7(a-x)}$;

б) $\dfrac{x(b-y)}{y(y-b)}$;

в) $\dfrac{7a^2-21ab}{24b^2-8ab}$;

г) $\dfrac{4x^2-9y^2}{3xy-2x^2}$;

д) $\dfrac{(2x-3y)^2}{6y-4x}$;

е) $\dfrac{(2x-3y)^3}{(3y-2x)^2}$.

38. Упростите выражение:

а) $\dfrac{ay - ab}{bx - ab - xy + ay}$; в) $\dfrac{10a - a^2 - 25}{3a - 15}$;

б) $\dfrac{bx - ax + by - ay}{a^2 - b^2}$; г) $\dfrac{-a^3 - 8}{2a - a^2 - 4}$.

39. Покажите, что значение дроби не зависит от $n (n \in N)$:

а) $\dfrac{5^{n+2} - 5^n}{5^{n+2} + 5^{n+1} + 5^n}$; б) $\dfrac{81^{n+1} - 3^{n+4}}{3^{n+2}\left(27^n - 1\right)}$.

40. Сократите дробь:

а) $\dfrac{(a + 1)^2 + 1}{a^4 + 4}$; д) $\dfrac{(x - 4)^2 + (x - 8)^2 - 10}{(x + 1)^2 + (x - 3)^2 - 80}$;

б) $\dfrac{b^3 + 1}{b^5 + b^4 + b^3 + b^2 + b + 1}$; е) $\dfrac{(ax - by)^2 + (bx + ay)^2}{(cx - ay)^2 + (ax + cy)^2}$;

в) $\dfrac{9x^2 + 3x + 1}{81x^4 + 9x^2 + 1}$; ж) $\dfrac{2a^4 + a^3 + 4a^2 + a + 2}{2a^3 - a^2 + a - 2}$;

г) $\dfrac{8y^6 - 1}{16y^6 - 4y^4 - 4y^2 - 1}$; з) $\dfrac{a^3 - 2a^2 + 5a + 26}{a^3 - 5a^2 + 17a - 13}$.

41. Постройте график функции:

а) $y = \dfrac{x^2 - 16}{2x + 8}$; б) $y = \dfrac{x^4 - 4x^2}{x^2 - 4}$.

42. Постройте график уравнения

$$\frac{4x^2 - y^2 - 2y - 1}{2x + y + 1} = 0.$$

43. Замените дробь тождественно равной ей дробью, числитель и знаменатель которой многочлены с целыми коэффициентами:

а) $\dfrac{\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{3}a + \frac{1}{4}}{\frac{1}{6}a - \frac{1}{12}}$; б) $\dfrac{0{,}5x^2 - 1{,}25x + 1}{0{,}25x + 0{,}75}$.

44. Упростите выражение:

а) $\dfrac{n!}{(n + 1)!}$; б) $\dfrac{(n + 1)!}{(n - 1)!}$.

Замечание. Запись $n!$ читается «эн факториал» и означает произведение всех натуральных чисел от 1 до n, т. е. $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (n - 1) \cdot n$.

Упражнения для повторения

45. Найдите значение дроби:

а) $\frac{12{,}7^2 - 5{,}3^2}{5 \cdot 0{,}96 + 2{,}6}$; б) $\frac{3{,}6^2 + 7{,}2 \cdot 15{,}4 + 15{,}4^2}{1{,}9(13{,}2 - 3{,}7)}$.

46. Решите уравнение:

а) $(x-2)(x-3)=0$; г) $x^3 - 4x = 0$;
б) $(x-1)(x+2)=0$; д) $x^2 - 9x + 14 = 0$;
в) $x^2 - 25 = 0$; е) $x^2 + 7x - 8 = 0$.

47. Найдите наименьшее значение выражения:

а) $x^2 - 6x + 10$; б) $a^2 + 4b^2 + 26 - 4ab + 10a - 20b$.

48. Разложите на множители:

а) $x^2 + x + \frac{1}{4}$; б) $y^2 - \frac{2}{3}y + \frac{1}{9}$; в) $a^4 - 16$; г) $a^4 + 324$.

Контрольные вопросы и задания

1. Какое выражение называют дробью? Приведите примеры числовой дроби и дроби, содержащей переменные.

2. Укажите допустимые значения переменных для дроби:

а) $\frac{x}{x-8}$; б) $\frac{1}{y^2-1}$; в) $\frac{a}{a-b}$.

3. Какое выражение называется рациональным, целым, дробным? Приведите примеры целого и дробного рациональных выражений.

4. Сформулируйте основное свойство дроби. Запишите тождество, выражающее это свойство, и докажите его.

5. Поясните на примере, как выполняется сокращение дробей.

6. Докажите тождества $\frac{-a}{b} = -\frac{a}{b}$ и $\frac{a}{b} = -\frac{-a}{b}$ и сформулируйте соответствующие свойства дроби.

§ 2. СУММА И РАЗНОСТЬ ДРОБЕЙ

3. Сложение и вычитание дробей

Покажем, что сумму и разность дробей всегда можно представить в виде дроби.

Рассмотрим случай, когда две дроби имеют одинаковый знаменатель, т. е. дроби вида: $\frac{a}{c}$ и $\frac{b}{c}$.

Докажем, что в этом случае выполняется тождество

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}. \qquad (1)$$

По условию $c \neq 0$, так как в противном случае дроби $\frac{a}{c}$ и $\frac{b}{c}$ не имели бы смысла.

Обозначим дробь $\frac{a}{c}$ буквой k, а дробь $\frac{b}{c}$ буквой l:

$$\frac{a}{c}=k,\ \frac{b}{c}=l.$$

Тогда по определению частного

$$a=ck,\ b=cl \text{ и } a+b=ck+cl=c(k+l).$$

Значит, $a+b=c(k+l)$.

Отсюда, учитывая, что $c \neq 0$, получим, что $k+l=\frac{a+b}{c}$.

Так как $\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=k+l$ и $k+l=\frac{a+b}{c}$, то

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}.$$

Мы доказали, что равенство (1) верно при любых допустимых значениях переменных, т. е. мы доказали тождество.

Опираясь на тождество (1), выполним сложение трех дробей:

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+\frac{d}{c}=\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{c}\right)+\frac{d}{c}=\frac{a+b}{c}+\frac{d}{c}=\frac{a+b+d}{c}.$$

Вообще для двух и более дробей выполняется правило: ***чтобы сложить дроби с одинаковыми знаменателями, нужно сложить их числители, а знаменатель оставить прежним.***

Пример 1. Выполним сложение дробей

$$\frac{x^2+3xy}{5x-10y} \text{ и } \frac{4y^2-7xy}{5x-10y}.$$

Имеем:

$$\frac{x^2+3xy}{5x-10y}+\frac{4y^2-7xy}{5x-10y}=\frac{x^2+3xy+4y^2-7xy}{5x-10y}=$$

$$=\frac{x^2-4xy+4y^2}{5x-10y}=\frac{(x-2y)^2}{5(x-2y)}=\frac{x-2y}{5}.$$

Теперь рассмотрим разность дробей с одинаковыми знаменателями и представим ее в виде дроби:

$$\frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a}{c}+\left(-\frac{b}{c}\right)=\frac{a}{c}+\frac{-b}{c}=\frac{a-b}{c}.$$

В преобразовании мы воспользовались свойством дроби: если у дроби изменить знак числителя и знак перед дробью, то получится тождественно равная ей дробь.

Таким образом, мы доказали тождество

$$\frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}, \qquad (2)$$

из которого следует правило: ***чтобы вычесть из одной дроби другую с тем же знаменателем, нужно из числителя первой дроби вычесть числитель второй дроби, а знаменатель оставить прежним.***

П р и м е р 2. Выполним вычитание дробей

$$\frac{8ab-b^2}{12a^2-36ab} \text{ и } \frac{2ab+17b^2}{12a^2-36ab}.$$

Имеем:

$$\frac{8ab-b^2}{12a^2-36ab}-\frac{2ab+17b^2}{12a^2-36ab}=\frac{8ab-b^2-\left(2ab+17b^2\right)}{12a^2-36ab}=$$

$$=\frac{8ab-b^2-2ab-17b^2}{12a(a-3b)}=\frac{6ab-18b^2}{12a(a-3b)}=\frac{6b(a-3b)}{12a(a-3b)}=\frac{b}{2a}.$$

Сделаем важное уточнение. При сложении дробей (или выполнении других действий с дробями) принято преобразования производить до тех пор, пока в результате не получится несократимая дробь.

Для сложения (или вычитания) дробей с разными знаменателями дроби приводят к общему знаменателю и затем выполняют преобразование по правилам сложения и вычитания дробей с одинаковыми знаменателями.

П р и м е р 3. Представим в виде дроби сумму

$$\frac{a}{6x^2y}+\frac{b}{8xy^3}.$$

Сначала приведем дроби к общему знаменателю. Наиболее простым знаменателем является одночлен $24x^2y^3$. Действительно, коэффициент одночлена $24x^2y^3$ равен наименьшему общему кратному коэффициентов знаменателей дробей-слагаемых, а каждая переменная взята с наибольшим показателем, с которым она входит в знаменатели дробей. Дополнительный множитель к первой дроби равен $4y^2$, а ко второй дроби равен $3x$.

Имеем:

$$\frac{a}{6x^2y}+\frac{b}{8xy^3}=\frac{a\cdot 4y^2}{24x^2y^3}+\frac{b\cdot 3x}{24x^2y^3}=\frac{4ay^2+3bx}{24x^2y^3}.$$

Заметим, что если в качестве общего знаменателя взять произведение знаменателей дробей-слагаемых, т. е. одночлен $48x^3y^4$, то тогда преобразование окажется более сложным.

При сложении или вычитании дробей, знаменатели которых многочлены, знаменатели дробей разлагают (если это возможно) на множители. В результате удастся найти более простой общий знаменатель.

Пример 4. Сложим дроби $\dfrac{y}{3x^2-xy}$ и $\dfrac{9x}{y^2-3xy}$.

Сначала разложим на множители знаменатель каждой дроби:

$$\frac{y}{3x^2-xy}+\frac{9x}{y^2-3xy}=\frac{y}{x(3x-y)}+\frac{9x}{y(y-3x)}.$$

Множители $3x-y$ и $y-3x$ являются противоположными выражениями. Поэтому в качестве общего знаменателя можно взять $xy\,(3x-y)$ или $xy\,(y-3x)$.

Продолжим преобразование, взяв за общий знаменатель выражение $xy\,(3x-y)$ (дополнительный множитель к первой дроби равен y, ко второй — x):

$$\frac{y}{x(3x-y)}+\frac{9x}{y(y-3x)}=\frac{y\cdot y}{xy(3x-y)}+\frac{9x(-x)}{xy(3x-y)}=$$

$$=\frac{y^2-9x^2}{xy(3x-y)}=\frac{(y-3x)(y+3x)}{xy(3x-y)}=-\frac{(3x-y)(y+3x)}{xy(3x-y)}=-\frac{y+3x}{xy}.$$

Здесь мы воспользовались свойством дроби: *если изменить знак в числителе и перед дробью, то получится тождественно равная ей дробь.*

Пример 5. Представим в виде дроби выражение:

$$2x-\frac{2x^3-10x^2+8x}{x^2-6x+8}-1.$$

Перепишем это выражение в виде $2x - 1 - \dfrac{2x^3 - 10x^2 + 8x}{x^2 - 6x + 8}$,

заменим двучлен $2x - 1$ дробью со знаменателем 1 и выполним преобразования:

$$2x - \frac{2x^3 - 10x^2 + 8x}{x^2 - 6x + 8} - 1 = \frac{2x - 1}{1} - \frac{2x^3 - 10x^2 + 8x}{x^2 - 6x + 8} =$$

$$= \frac{(2x-1)(x^2 - 6x + 8) - (2x^3 - 10x^2 + 8x)}{x^2 - 6x + 8} = \frac{-3x^2 + 14x - 8}{x^2 - 6x + 8} =$$

$$= \frac{(-x^2 + 6x - 8) + (-2x^2 + 8x)}{x^2 - 6x + 8} = \frac{-(x^2 - 6x + 8)}{x^2 - 6x + 8} +$$

$$+ \frac{-2x(x - 4)}{(x - 4)(x - 2)} = -1 - \frac{2x}{x-2} = -\frac{x-2+2x}{x-2} = -\frac{3x-2}{x-2}.$$

Пример 6. Упростим выражение:

$$\frac{x^5 + 2x^4 + 4x^3}{x^4 + 4x^2 + 16} + \frac{8}{x^2 - 2x + 4}.$$

Знаменатель первой дроби можно представить в виде разности квадратов двух выражений, если прибавить и вычесть одночлен $4x^2$.

Имеем:

$$\frac{x^5 + 2x^4 + 4x^3}{x^4 + 4x^2 + 16} + \frac{8}{x^2 - 2x + 4} = \frac{x^5 + 2x^4 + 4x^3}{x^4 + 8x^2 + 16 - 4x^2} + \frac{8}{x^2 - 2x + 4} =$$

$$= \frac{x^5 + 2x^4 + 4x^3}{\left(x^2 + 4\right)^2 - (2x)^2} + \frac{8}{x^2 - 2x + 4} = \frac{x^3\left(x^2 + 2x + 4\right)}{\left(x^2 + 4 - 2x\right)\left(x^2 + 4 + 2x\right)} +$$

$$+ \frac{8}{x^2 - 2x + 4} = \frac{x^3}{x^2 - 2x + 4} + \frac{8}{x^2 - 2x + 4} = \frac{x^3 + 8}{x^2 - 2x + 4} =$$

$$= \frac{(x+2)\left(x^2 - 2x + 4\right)}{x^2 - 2x + 4} = x + 2.$$

Пример 7. Выполним действия:

$$\frac{1}{x - a} + \frac{1}{x + a} + \frac{2x}{x^2 + a^2} + \frac{4x^3}{x^4 + a^4}.$$

В этом случае сложение выгодно выполнять последовательно: сначала сложить две первые дроби, затем к полученной сумме прибавить третью дробь и, наконец, к сумме первых трех дробей прибавить четвертую дробь.

Имеем:

$$\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x+a}+\frac{2x}{x^2+a^2}+\frac{4x^3}{x^4+a^4}=\frac{2x}{x^2-a^2}+\frac{2x}{x^2+a^2}+\frac{4x^3}{x^4+a^4}=$$

$$=\frac{4x^3}{x^4-a^4}+\frac{4x^3}{x^4+a^4}=\frac{8x^7}{x^8-a^8}.$$

49. Представьте в виде дроби:

а) $\frac{a+b}{x}-\frac{b}{x}$; д) $\frac{5x-3y}{10x}+\frac{8y-5x}{10x}$;

б) $\frac{a}{y}-\frac{a-b}{y}$; е) $\frac{x^2-2y^2}{5xy}-\frac{x^2-7y^2}{5xy}$;

в) $\frac{x+y}{3c}+\frac{2y-x}{3c}$; ж) $\frac{a^2-b^2}{6b^2}-\frac{a^2+b^2}{6b^2}$;

г) $\frac{10b+5}{6a}+\frac{1-4b}{6a}$; з) $\frac{c^3-d^2}{8c^2d}+\frac{c^3+d^2}{8c^2d}$.

50. Упростите выражение:

а) $\frac{c-1}{12c}+\frac{2c+7}{12c}-\frac{6-3c}{12c}$;

б) $\frac{a-4b}{2ab}-\frac{2a-6b}{2ab}+\frac{3a-b}{2ab}$;

в) $\frac{5p-2q}{3pq}-\frac{2p-3q}{3pq}-\frac{p+q}{3pq}$;

г) $\frac{17x-4y}{21xy}+\frac{8x+9y}{21xy}-\frac{11x-16y}{21xy}$.

51. Выполните сложение или вычитание дробей:

а) $\frac{5x-2y}{x^2-y^2}+\frac{y-4x}{x^2-y^2}$; г) $\frac{2a-3b}{(a+b)^2}+\frac{a}{(a+b)^2}$;

б) $\frac{7z+8}{z^2-25}-\frac{5z-2}{z^2-25}$; д) $\frac{8a-3b}{(a-b)^2}-\frac{2a+3b}{(a-b)^2}$;

в) $\frac{16}{c+4}-\frac{c^2}{c+4}$; е) $\frac{(x+y)^2}{x^2+xy+y^2}-\frac{xy}{x^2+xy+y^2}$.

52. Представьте в виде дроби (n — натуральное число):

а) $\frac{a^n}{a^{2n}-1} - \frac{1}{a^{2n}-1}$; в) $\frac{2x^{3n}+6x^n}{(x^n-1)^2} - \frac{6x^{2n}+2}{(x^n-1)^2}$;

б) $\frac{b^{n+1}}{(b^n-2)^2} - \frac{2b}{(b^n-2)^2}$; г) $\frac{y^{2n}-4y^n}{y^{n+1}-5y} - \frac{7y^n-30}{y^{n+1}-5y}$.

53. Упростите выражение:

а) $\frac{(a+b)^3}{3a^2+b^2} - \frac{(a-b)^3}{3a^2+b^2}$; г) $\frac{a^2-3ab}{(a-5b)^3} + \frac{7ab-25b^2}{(5b-a)^3}$;

б) $\frac{(a+b)^3}{a^2+3b^2} + \frac{(a-b)^3}{a^2+3b^2}$; д) $\frac{81a^2}{(9a-3b)^2} - \frac{9b^2}{(9a-3b)^2}$;

в) $\frac{x^2-x}{x^2-9y^2} + \frac{9y^2-x}{9y^2-x^2}$; е) $\frac{8x^3}{(2x-4y)^3} - \frac{64y^3}{(2x-4y)^3}$.

54. Приведите дроби к общему знаменателю и выполните сложение или вычитание:

а) $\frac{a}{2x} + \frac{b}{3x}$; г) $\frac{9m}{15n} - \frac{m}{10n}$;

б) $\frac{c}{24y} - \frac{d}{18y}$; д) $\frac{x-3}{3x} + \frac{x+2}{2x}$;

в) $\frac{5x}{18y} + \frac{2x}{9y}$; е) $\frac{y-3}{6y} - \frac{y-4}{8y}$.

55. Выполните сложение или вычитание:

а) $\frac{x}{y^2} + \frac{2}{y}$; г) $\frac{x+a}{x^2} + \frac{x-a}{ax}$; ж) $\frac{c-d}{c^2d} - \frac{c+d}{cd^2}$;

б) $\frac{2x}{y} - \frac{x}{y^2}$; д) $\frac{y+b}{y^2} + \frac{y+b}{by}$; з) $\frac{a^2-b^2}{b^5} + \frac{2}{b^3}$;

в) $\frac{1-a}{a^2} + \frac{1}{a}$; е) $\frac{a-2b}{ab^2} - \frac{b-2a}{a^2b}$; и) $\frac{x^3+1}{x^7} - \frac{1}{x^4}$.

56. Выполните сложение или вычитание:

а) $\frac{x+y}{x} + \frac{x}{x-y}$; г) $\frac{3}{2y+4} - \frac{1}{3y+6}$;

б) $\frac{a}{a-b} - \frac{b}{a+b}$; д) $\frac{a}{5a-10} + \frac{1}{4-2a}$;

в) $\frac{1}{2x-3} - \frac{1}{2x+3}$; е) $\frac{b}{8b-20} - \frac{b-5}{5-2b}$.

57. Докажите, что при любых $x \neq y$ и $y \neq 0$ выражение $\frac{x}{y} + \frac{x+y}{x-y} - \frac{x^2+xy}{xy-y^2}$ принимает единственное значение.

58. Представьте в виде дроби:

а) $\frac{a+3}{a^2-3a} + \frac{a-9}{3a-9}$; г) $\frac{1}{xy-x^2} - \frac{1}{y^2-xy}$;

б) $\frac{b-4}{2b-4} - \frac{2}{2b-b^2}$; д) $\frac{c}{c^2-9} + \frac{c+2}{c^2-3c}$;

в) $\frac{2}{x^2+2xy} + \frac{1}{xy+2y^2}$; е) $\frac{d+1}{d+4} - \frac{d^2-4}{d^2-16}$.

59. Упростите выражение: а) $\frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!}$; б) $\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n-1)!}$.

60. Заполните таблицу, вычислив значения выражений $a^2 + a$ и $\frac{1}{a} - \frac{1}{a+1}$ для указанных в таблице значений переменной a.

	a					
	1	2	3	4	5	6
a^2+a						
$\frac{1}{a} - \frac{1}{a+1}$						

Какими числами являются соответственные значения этих выражений?

61. Упростите выражение ($n \in N$):

а) $\frac{a^{n+2} - 6a^{n+1} + 9a^n}{a^3 - 9a^2 + 27a - 27} - \frac{3a^{n-1}}{a-3}$;

б) $\frac{x^{n-1}}{x^n y - y^{n+1}} - \frac{y^{n-1}}{x^{n+1} - xy^n}$;

в) $\frac{x^{2n} + x^n - 6}{2x^n + 6} - \frac{x^{2n} - 6x^n + 8}{2x^n - 4}$;

г) $\frac{(a^n + b^n)^2}{a^n - b^n} - \frac{(a^n - b^n)^2}{a^n + b^n} - \frac{8b^n}{\left(\frac{a}{b}\right)^{2n} - 1}$.

62. Представьте двучлен $a - b$ в виде дроби со знаменателем, равным:

а) 1; б) 3; в) a; г) $a + b$.

63. Преобразуйте в дробь выражение:

а) $a + \frac{1}{a}$; в) $\frac{x+y}{x-y} - 1$; д) $p - 4 - \frac{16}{p-4}$;

б) $b - \frac{1}{b+1}$; г) $\frac{(x-y)^2}{2x} + y$; е) $c + d - \frac{c^2+d^2}{c+d}$.

64. Упростите выражение:

а) $\frac{x+3}{x} - \frac{x}{x-3} + \frac{9}{x^2-3x}$; г) $\frac{1}{(a-3)^2} - \frac{2}{a^2-9} + \frac{1}{(a+3)^2}$;

б) $\frac{3}{y+5} - \frac{2}{y-5} + \frac{30}{y^2-25}$; д) $\frac{1}{x-2} - \frac{6x}{x^3-8} + \frac{x-2}{x^2+2x+4}$;

в) $\frac{b+c}{b^2-bc} - \frac{4b}{b^2-c^2} - \frac{b-c}{b^2+bc}$; е) $\frac{1}{x+3} - \frac{10x+3}{x^3+27} + \frac{x+4}{x^2-3x+9}$.

65. Представьте выражение в виде дроби:

а) $\frac{x^2-4x}{xy-4x-3y+12} - \frac{x-2}{y-4}$;

б) $\frac{y^2}{xy-5x+y-5} + \frac{2}{x+1}$;

в) $\frac{2b}{a^2+2ab} - \frac{b}{2a-3a^2} + \frac{6b+2}{2a+4b-6ab-3a^2}$;

г) $\frac{a^2+3b}{a^2-ab+3a-3b} - \frac{ab-3a}{a^2+ab+3a+3b} + 1$.

66. Упростите выражение:

а) $\frac{(x+y)^2}{x^2+xy} + \frac{(x-y)^2}{x^2-xy} + 7$;

б) $\frac{x^2-9y^2}{6x-18y} - \frac{x^2+6xy+9y^2}{6x+18y} + 3y$;

в) $\frac{x^3}{x-1} - \frac{x^2}{x+1} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}$;

г) $\frac{(x+1)^3}{x} - \frac{(x+1)^2}{x+2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x+2}$.

67. Докажите, что при любых допустимых значениях переменной значение выражения:

а) $\frac{a^3}{a-3} - \frac{3a^3+81}{a^2-9}$ является положительным числом;

б) $\frac{2b^2+8b+6}{b^2-9} + \frac{(b-1)^3}{3-b}$ является отрицательным числом.

68. Докажите, что при любом натуральном n верно равенство

$$\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Воспользовавшись этим равенством, найдите значение суммы:

$$\frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \frac{9}{4^2 + 5^2}.$$

69. Представьте сумму в виде дроби:

а) $\frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} + \frac{1}{(x+3)(x+4)} +$
$+ \frac{1}{(x+4)(x+5)}$;

б) $\frac{1}{(x+1)(x+3)} + \frac{1}{(x+3)(x+5)} + \frac{1}{(x+5)(x+7)} +$
$+ \frac{1}{(x+7)(x+9)}$.

70. Представьте в виде дроби:

а) $\frac{1}{a-2} + \frac{1}{a+2} + \frac{2a}{a^2+4} + \frac{4a^3}{a^4+16} + \frac{8a^7}{x^8+256}$;

б) $\frac{1}{b^2-1} + \frac{1}{b^2+1} + \frac{2b^2}{b^4+1} + \frac{4b^6}{b^8+1} + \frac{8b^{14}}{b^{16}+1}$.

71. Упростите выражение:

а) $\frac{x-3}{x^3-2x^2-9x-18} + \frac{x+2}{x^2+5x+6}$;

б) $\frac{a^6+b^6}{a^4(a^2+3b^2)+b^4(3a^2+b^2)} + \frac{3a^2b^2}{(a^2+b^2)^2}$;

в) $\frac{2x^3-12x^2+24x-16}{0{,}5x^3-3x^2+6x-4} - \frac{2x^2-8x+8}{0{,}125x^2-0{,}5x+0{,}5}$;

г) $\dfrac{a^2-(b-c)^2}{(a-b+c)^2}+\dfrac{(a+b+c)^2}{(a+c)^2-b^2}$;

д) $\dfrac{x-y}{x}+\dfrac{(x-y)^2}{x^2}-\dfrac{(x-y)^3}{x^3}-\dfrac{(x^2-y^2)^2+y^3(x-y)}{x^4}$.

Упражнения для повторения

72. Решите уравнение:

а) $\dfrac{3x-1}{2}-\dfrac{2x+3}{3}=\dfrac{5x+15}{6}$;

б) $\dfrac{7x-4}{2}-2=\dfrac{8x-1}{5}$;

в) $\dfrac{(2x-1)(3x-2)}{6}=x^2-\dfrac{x-6{,}5}{5}$;

г) $\dfrac{(5x-3)(2x-4)}{5}=2x^2-\dfrac{6x-7}{2}$.

73. Докажите, что парабола $y=x^2$ и прямая $y=14x-49$ имеют только одну общую точку.

74. Найдите координаты точек пересечения графика уравнения $x^2-y=9$ с осями координат.

4. Представление дроби в виде суммы дробей

Сумму двух или более дробей можно представить в виде несократимой дроби, у которой числитель и знаменатель — целые числа или многочлены, единственным образом.

Обратная задача — представление данной дроби в виде суммы двух или более дробей — неопределенная, т. е. допускает сколько угодно решений.

Действительно, если дана дробь $\dfrac{a}{b}$ и требуется эту дробь представить в виде суммы двух дробей, то в качестве одного из слагаемых мы можем взять произвольную дробь $\dfrac{c}{d}$. Тогда вторая дробь равна разности $\dfrac{a}{b}-\dfrac{c}{d}$, т. е. дроби $\dfrac{ad-bc}{bd}$.

Например, обыкновенную дробь $\frac{7}{12}$ можно представить в виде суммы двух дробей следующим образом:

$$\frac{7}{12} = \frac{3+4}{12} = \frac{3}{12} + \frac{4}{12} = \frac{1}{4} + \frac{1}{3},$$

или

$$\frac{7}{12} = \frac{14}{24} = \frac{4+10}{24} = \frac{4}{24} + \frac{10}{24} = \frac{1}{6} + \frac{5}{12},$$

или

$$\frac{7}{12} = \frac{21}{36} = \frac{3+18}{36} = \frac{3}{36} + \frac{18}{36} = \frac{1}{12} + \frac{1}{2}.$$

Дробь $\frac{x^3}{x^2-1}$ можно представить в виде суммы по-разному:

$$\frac{x^3}{x^2-1} = \frac{x^3-x+x}{x^2-1} = \frac{x^3-x}{x^2-1} + \frac{x}{x^2-1} =$$

$$= \frac{x(x^2-1)}{x^2-1} + \frac{x}{x^2-1} = x + \frac{x}{x^2-1}$$

или

$$\frac{x^3}{x^2-1} = \frac{x^3-1+1}{x^2-1} = \frac{x^3-1}{x^2-1} + \frac{1}{x^2-1} =$$

$$= \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)} + \frac{1}{x^2-1} = \frac{x^2+x+1}{x+1} + \frac{1}{x^2-1} =$$

$$= \frac{x(x+1)+1}{x+1} + \frac{1}{x^2-1} = \frac{x(x+1)}{x+1} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x^2-1} =$$

$$= x + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x^2-1}.$$

Для представления дроби в виде суммы нескольких дробей можно воспользоваться *методом неопределенных коэффициентов*. Этот метод впервые применил французский философ Рене Декарт (1596—1650) в своей книге «Рассуждение о методе» (1637).

Покажем суть этого метода на примере.

Пример 1. Представим дробь $\frac{2x+6}{x^2-4}$ в виде суммы (или разности) двух дробей, знаменателями которых являются двучлены первой степени.

Знаменатель дроби $\frac{2x+6}{x^2-4}$ есть произведение линейных двучленов $(x-2)(x+2)$. Покажем, что данную дробь можно представить в виде

$$\frac{a}{x-2}+\frac{b}{x+2},$$

где a и b — некоторые числа.

Сложим дроби в правой части написанного равенства:

$$\frac{a}{x-2}+\frac{b}{x+2}=\frac{ax+2a+bx-2b}{x^2-4}=\frac{(a+b)x+2(a-b)}{x^2-4}.$$

Равенство

$$\frac{2x+6}{x^2-4}=\frac{(a+b)x+2(a-b)}{x^2-4}$$

должно быть тождеством.

Так как знаменатели дробей равны, то должны быть равны и числители, т. е.

$$2x+6=(a+b)x+2(a-b).$$

Отсюда имеем систему

$$\begin{cases} a+b=2, \\ 2(a-b)=6. \end{cases}$$

Решив ее, найдем, что $a=2{,}5$, $b=-0{,}5$.

Следовательно,

$$\frac{2x+6}{x^2-4}=\frac{2{,}5}{x-2}+\frac{-0{,}5}{x+2}=\frac{5}{2x-4}-\frac{1}{2x+4}.$$

Декарт Рене (1596—1650), французский философ и математик, физик и физиолог; заложил основы аналитической геометрии, ввел понятия переменной величины и функции, автор многих алгебраических обозначений.

Представление дроби в виде суммы нескольких слагаемых позволяет проще решать некоторые задачи. Покажем это.

Пример 2. Найдем значение дроби $\frac{x^3+x+222}{37x}$ при $x = 6$.

Представим данную дробь в виде суммы двух дробей и проведем вычисления. Получим:

$$\frac{x^3+x+222}{37x} = \frac{x(x^2+1)}{37x} + \frac{2\cdot 3\cdot 37}{37x} = \frac{x^2+1}{37} + \frac{6}{x} = \frac{6^2+1}{37} + \frac{6}{6} = 1 + 1 = 2.$$

Пример 3. При каком целом n значение дроби $\frac{2n^2-7n+12}{n-2}$ является целым числом?

Представим дробь $\frac{2n^2-7n+12}{n-2}$ в виде суммы многочлена и дроби. Для этого разделим многочлен $2n^2 - 7n + 12$ на двучлен $n - 2$. Деление выполняют обычно «уголком» так же, как при делении целых чисел:

$$\begin{array}{r|l} -\,2n^2 - 7n + 12 & n-2 \\ \underline{2n^2 - 4n\phantom{{}+12}} & \overline{2n-3} \\ -\,-3n + 12 & \\ \underline{-3n + 6} & \\ 6 & \end{array}$$

В результате деления получили, что частное равно $2n - 3$ и остаток равен 6.

Отсюда следует, что

$$\frac{2n^2-7n+12}{n-2} = 2n - 3 + \frac{6}{n-2}.$$

Двучлен $2n - 3$ при любом целом n является целым числом. Дробь $\frac{6}{n-2}$ принимает целые значения, если $n - 2 \in$ $\in \{-6; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 6\}$ и только при этих n.

Отсюда $n \in \{-4; -1; 0; 1; 3; 4; 5; 8\}$.

Значит, при $n \in \{-4; -1; 0; 1; 3; 4; 5; 8\}$ данная дробь является целым числом.

Выполнив деление, мы представили дробь $\frac{2n^2-7n+12}{n-2}$ в виде суммы двух слагаемых: многочлена $2n - 3$ и *правильной дроби*, т. е. дроби, у которой степень числителя меньше степени знаменателя. Такое преобразование называют *выделением целой части из дроби*.

Заметим, что если при делении многочлена на многочлен в остатке окажется нуль, то это означает, что данный многочлен делится на другой многочлен. Например, многочлен $2x^3 - 13x^2 + 16x - 5$ делится на двучлен $x - 5$:

$$\begin{array}{r|l} -\,2x^3 - 13x^2 + 16x - 5 & x - 5 \\ \cline{2-2} \underline{2x^3 - 10x^2} & 2x^2 - 3x + 1 \\ -\,-3x^2 + 16x & \\ \underline{-3x^2 + 15x} & \\ -\,x - 5 & \\ \underline{x - 5} & \\ 0 & \end{array}$$

П р и м е р 4. Найдем значение дроби $\frac{3a^2+5ab+20b^2}{a^2}$, если известно, что $\frac{b}{a} = 0{,}2$.

Представим данную дробь в виде суммы, поделив почленно каждый член числителя на знаменатель, а затем заменим частное $\frac{b}{a}$ его значением — числом 0,2:

$$\frac{3a^2+5ab+20b^2}{a^2} = \frac{3a^2}{a^2} + \frac{5ab}{a^2} + \frac{20b^2}{a^2} = 3 + 5 \cdot \frac{b}{a} + 20 \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^2 =$$
$$= 3 + 5 \cdot 0{,}2 + 20 \cdot 0{,}2^2 = 3 + 1 + 0{,}8 = 4{,}8.$$

75. Представьте дробь в виде суммы двух дробей с однозначными знаменателями:

а) $\frac{8}{15}$; б) $\frac{15}{56}$; в) $\frac{29}{45}$; г) $\frac{41}{63}$.

76. Представьте дробь в виде суммы трех дробей:

а) $\frac{119}{182}$; б) $\frac{103}{165}$.

77. Представьте дробь $\frac{1}{2}$ в виде суммы трех дробей со знаменателями:

а) 5, 6 и 15; б) 4, 6 и 12; в) 6, 10 и 30.

78. При каких значениях a и b выполняется тождество:

а) $\dfrac{3x}{(x+1)(x-2)} = \dfrac{a}{x+1} + \dfrac{b}{x-2}$; б) $\dfrac{5x-3}{x^2-9} = \dfrac{a}{x-3} + \dfrac{b}{x+3}$?

79. Представьте дробь в виде суммы двух дробей, знаменатели которых — многочлены первой степени относительно x:

а) $\dfrac{5x-1}{x(x-1)}$; в) $\dfrac{4x+3}{x^2-1}$; д) $\dfrac{x+28}{x^2-36}$;

б) $\dfrac{7x-6}{(x+2)(x-3)}$; г) $\dfrac{x+2}{x^2-25}$; е) $\dfrac{3x-4}{x^2+10x+24}$.

80. Представьте дробь в виде суммы двух дробей, знаменатели которых — многочлены первой степени:

а) $\dfrac{6x+1}{4x^2-1}$; в) $\dfrac{x+17}{(2x-1)(3x+2)}$;

б) $\dfrac{3x+18}{9x^2-4}$; г) $\dfrac{7x-6}{(4x-1)(3x-5)}$.

81. Выполните деление многочлена на многочлен:

а) $(a^3 - 4a^2 - 16a + 15) : (a + 3)$;

б) $(6x^4 + 13x^3 - 9x^2 - 31x - 14) : (3x + 2)$;

в) $(y^3 - 21y - 20) : (y + 4)$;

г) $(8b^4 - 22b^3 + b^2 + 16b - 15) : (2b - 5)$.

82. Выделите целую часть из дроби и выясните, при каких натуральных n дробь принимает натуральные значения:

а) $\dfrac{7n^2+3n+12}{n}$; в) $\dfrac{(n-7)^2}{n}$; д) $\dfrac{n^2-8n+17}{n-4}$;

б) $\dfrac{2n^2-8n+5}{n}$; г) $\dfrac{(2n-3)^3}{n^3}$; е) $\dfrac{n^3-6n^2+12n+3}{(n-2)^2}$.

83. Зная, что $m \in \boldsymbol{Z}$, найдите целые значения дроби:

а) $\dfrac{m^2-10m+27}{m-5}$; б) $\dfrac{(m-6)^2}{m-3}$; в) $\dfrac{(3m-4)^3}{m^3}$.

84. Найдите значение дроби $\dfrac{(x-2y)^2}{y^2}$, если:

а) $\dfrac{x}{y} = 3$; б) $\dfrac{x-y}{y} = 1$; в) $\dfrac{2x-3y}{y} = 7$.

85. Докажите, что при любом x, отличном от нуля, значение дроби $\frac{3x^2+4}{x^2+1}$ является дробным числом.

86. Укажите все точки графика функции $y = \frac{x^2-4x+6}{x-2}$, координаты которых являются целыми числами.

87. Запишите уравнения всех прямых, не имеющих общих точек с графиком функции $f(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{x - 1}$ и проходящих через точку с координатами:

а) (2; 3); б) (2; 4); в) (0; 1).

88. Докажите, что графики функций

$y = -2x + 6$ и $y = \frac{(x-3)^4}{x^3 - 9x^2 + 27x - 27}$ не имеют общих точек.

Упражнения для повторения

89. Выполните сложение или вычитание дробей:

а) $\frac{x+4}{x^2-2x} - \frac{x}{x^2-4}$; в) $\frac{a^2+b^2}{a^3+b^3} - \frac{1}{a+b}$;

б) $\frac{3}{2y+1} + \frac{y+7}{1-4y^2}$; г) $\frac{1}{a-b} - \frac{3ab}{a^3-b^3}$.

90. Найдите значение дроби $\frac{b^3+b^2+b+1}{1+\frac{1}{b}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{b^3}}$ при $b = -\frac{1}{2}$.

91. Две речные пристани A и B расположены на расстоянии s км друг от друга. Между ними курсирует катер, скорость которого в стоячей воде равна v км/ч. Скорость течения реки равна 3 км/ч. Сколько времени t (в часах) потребуется катеру на путь от A до B и обратно? Найдите t, если $s = 60$, $v = 33$.

Контрольные вопросы и задания

1. Сформулируйте правила сложения и вычитания дробей с одинаковыми знаменателями. Приведите примеры.

2. В чем состоит правило сложения дробей с разными знаменателями? Приведите пример.

3. Представьте дробь $\frac{4x}{x^2-9}$ в виде суммы дробей вида $\frac{a}{x-3}$ + $+\frac{b}{x+3}$, используя метод неопределенных коэффициентов.

4. Найдите целые значения n, при которых значение дроби $\frac{n^2-2n+6}{n}$ является целым числом.

§ 3. ПРОИЗВЕДЕНИЕ И ЧАСТНОЕ ДРОБЕЙ

5. Умножение дробей. Возведение дроби в степень

Покажем, что произведение двух дробей тождественно равно дроби, у которой числитель равен произведению числителей, а знаменатель — произведению знаменателей перемножаемых дробей. Иначе говоря, докажем, что если $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ — произвольные дроби, то имеет место тождество

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}. \qquad (1)$$

Обозначим значение дроби $\frac{a}{b}$ буквой k, а значение дроби $\frac{c}{d}$ буквой l: $\frac{a}{b} = k$, $\frac{c}{d} = l$. Тогда по определению частного $a = bk$ и $c = dl$. Перемножив правые и левые части этих равенств и применив переместительное и сочетательное свойства умножения, найдем, что

$$ac = (bk) \cdot (dl) = (bd)(kl).$$

Отсюда, учитывая, что $b \neq 0$ и $d \neq 0$ и, следовательно, $bd \neq 0$, получим:

$$kl = \frac{ac}{bd}.$$

Подставив вместо k и l дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$, получим:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Мы доказали, что равенство (1) верно при любых допустимых значениях переменных, т. е. является тождеством.

Опираясь на тождество (1), можно доказать, что

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f}=\frac{ace}{bdf}.$$

Действительно,

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f}=\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\right)\cdot\frac{e}{f}=\frac{ac}{bd}\cdot\frac{e}{f}=\frac{ace}{bdf}.$$

Таким образом, при умножении дробей можно пользоваться правилом:

чтобы выполнить умножение дробей, нужно перемножить их числители и знаменатели отдельно и первое произведение записать числителем, а второе — знаменателем дроби.

Пример 1. Выполним умножение дробей

$$\frac{x^4}{21y^3} \text{ и } \frac{14y^2}{x^3}.$$

Применив правило умножения дробей, получим:

$$\frac{x^4}{21y^3}\cdot\frac{14y^2}{x^3}=\frac{x^4\cdot 14y^2}{21y^3\cdot x^3}=\frac{x\cdot 2}{3\cdot y}=\frac{2x}{3y}.$$

Пример 2. Найдем произведение дробей

$$\frac{a^2-2ab}{b^2} \text{ и } \frac{4b^2}{a^2-4b^2}.$$

По правилу умножения дробей имеем:

$$\frac{a^2-2ab}{b^2}\cdot\frac{4b^2}{a^2-4b^2}=\frac{(a^2-2ab)\cdot 4b^2}{b^2\cdot(a^2-4b^2)}=\frac{a(a-2b)\cdot 4b^2}{b^2(a-2b)(a+2b)}=\frac{4a}{a+2b}.$$

Пример 3. Выполним умножение:

$$(x^3-8)\cdot\frac{1}{x^2-9x+18}\cdot\frac{7x-21}{9x^2+18x+36}=$$

$$=\frac{x^3-8}{1}\cdot\frac{1}{x^2-3x-6x+18}\cdot\frac{7x-21}{9x^2+18x+36}=$$

$$=\frac{(x-2)(x^2+2x+4)\cdot 7(x-3)}{(x(x-3)-6(x-3))\cdot 9(x^2+2x+4)}=$$

$$=\frac{(x-2)(x^2+2x+4)\cdot 7(x-3)}{(x-3)(x-6)\cdot 9(x^2+2x+4)}=\frac{7x-14}{9x-54}.$$

Используя правило умножения дробей, выведем правило возведения дроби в степень.

Имеем:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{aa}{bb} = \frac{a^2}{b^2}; \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{aaa}{bbb} = \frac{a^3}{b^3}.$$

Вообще, если $n \in N$, то:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdots \frac{a}{b}}_{n\text{ раз}} = \frac{\overbrace{aa\ldots a}}{\underbrace{bb\ldots b}_{n\text{ раз}}} = \frac{a^n}{b^n}.$$

Значит, $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$.

Чтобы возвести дробь в степень, нужно возвести в эту степень числитель и знаменатель дроби и первый результат записать в числитель, а второй — в знаменатель дроби.

Пример 4. Возведем дробь $\frac{2x}{3y^2}$ в четвертую степень.

Применив правило возведения дроби в степень, получим:

$$\left(\frac{2x}{3y^2}\right)^4 = \frac{(2x)^4}{(3y^2)^4} = \frac{2^4x^4}{3^4(y^2)^4} = \frac{16x^4}{81y^8}.$$

Пример 5. Упростим выражение:

$$\left(\left(\frac{a^2+3a-10}{a^2+7a+10}\right)^2\right)^n \cdot \left(\frac{a^2+2a}{2-a}\right)^{2n}.$$

Имеем:

$$\left(\left(\frac{a^2+3a-10}{a^2+7a+10}\right)^2\right)^n \cdot \left(\frac{a^2+2a}{2-a}\right)^{2n} = \left(\frac{(a-2)(a+5)}{(a+5)(a+2)}\right)^{2n} \cdot \left(\frac{a(a+2)}{a-2}\right)^{2n} =$$

$$= \frac{(a-2)^{2n}}{(a+2)^{2n}} \cdot \frac{a^{2n}\cdot(a+2)^{2n}}{(a-2)^{2n}} = a^{2n}.$$

92. Выполните умножение:

а) $\frac{7a}{12} \cdot \frac{3}{b}$; в) $\frac{a}{15b} \cdot \frac{5b}{a^2}$; д) $\frac{10a^3}{7b^3} \cdot \frac{2b}{5a}$; ж) $42x^6 \cdot \frac{1}{14x^8}$;

б) $\frac{4b}{3a} \cdot \frac{2a}{5b}$; г) $\frac{12x}{y^3} \cdot \frac{5y^2}{36}$; е) $\frac{8c^4}{9d^2} \cdot \frac{3d}{4c^2}$; з) $\frac{a}{13b^2} \cdot 26ab$.

93. Представьте в виде дроби:

а) $-\frac{11p^3}{8q^4} \cdot \frac{12q^2}{55p}$; г) $-3c^2d^2 \cdot \left(-\frac{7}{9cd^2}\right)$;

б) $\frac{48x^5}{125y^5} \cdot \left(-\frac{50y^4}{9x^3}\right)$; д) $\frac{3x^2y}{4a^4} \cdot \frac{5a^2}{2xy} \cdot \frac{8a}{15}$;

в) $-\frac{35a^4x^4}{81b^4} \cdot \left(-\frac{27b^4}{14a^3x^3}\right)$; е) $\frac{3b}{28a^2} \cdot \frac{2a}{7b^4} \cdot 49a^4b^3$.

94. Выполните умножение (n — натуральное число):

а) $\frac{x^{n+1}}{y^{n-1}} \cdot \frac{y^{n+1}}{x^{n+3}}$; в) $\frac{a^n + b^n}{a^nb^n} \cdot \frac{a^{2n}b^{2n}}{a^{2n} - b^{2n}} \cdot \frac{b^n - a^n}{b^n}$;

б) $\frac{a^{2n-2}}{b^{3n-2}} \cdot \frac{b^{2n-1}}{a^{n-1}}$; г) $\frac{x^{2n} - 1}{x^{2n} + x^n + 1} \cdot \frac{x^{3n} - 1}{x^n + 1}$.

95. Преобразуйте в дробь:

а) $\frac{5(x+y)}{8xy} \cdot \frac{4x^2}{7(x+y)}$; г) $\frac{3a}{ab-b^2} \cdot \frac{a^2-ab}{6b}$;

б) $\frac{2a-2b}{3ab} \cdot \frac{6a^2}{5a-5b}$; д) $\frac{a^2-b^2}{4ab} \cdot \frac{8a}{3a+3b}$;

в) $\frac{3x-6y}{xy} \cdot \frac{x^2}{xy-2y^2}$; е) $\frac{2x-4y}{x^2} \cdot \frac{x^3}{x^2-4y^2}$.

96. Упростите выражение:

а) $\frac{(a-x)^2}{(a+x)^2} \cdot \frac{2a^2+4ax+2x^2}{3a^2-6ax+3x^2}$; б) $(x^2 - 6x + 9) \cdot \frac{1}{3x^2-9x}$;

в) $\frac{x^2-1}{x+2y} \cdot \frac{5x+10y}{x^2+x}$; г) $\frac{1}{a^2-10ab+25b^2} \cdot (a^2 - 25b^2)$;

д) $\frac{(x^2+5)^2 + 4(x^2+5) + 4}{x^2 - 10x + 21} \cdot \frac{2x^2 - 18}{(x^2+7)^2}$;

е) $\frac{y^2 + 18y + 77}{y^2 - 49} \cdot \frac{5y - 35}{(y+8)^2 + 6(y+8) + 9}$.

97. Докажите, что если $a + b = 0$, то верно равенство

$$\left(\frac{a^2 + 6ab + 9b^2}{a^2 + 10ab + 25b^2}\right)^2 = \frac{1}{16}.$$

98. Выполните умножение:

а) $\dfrac{y^2-16}{x^2+xy} \cdot \dfrac{xy+y^2}{4y-y^2} \cdot \dfrac{1}{y^2+y-12}$;

б) $\dfrac{8x^2y}{(x-y)^3} \cdot \dfrac{(y-x)^2}{2x} \cdot \dfrac{1}{(x+y)^2-(x-y)^2}$;

в) $\dfrac{\left(1+x+x^2\right)^2}{x^3-216} \cdot \dfrac{x^2+6x+36}{x^4+2x^3+3x^2+2x+1}$;

г) $\dfrac{(a+b)^2-3ab}{a^3+a^2b+ab^2+b^3} \cdot \dfrac{a^4-b^4}{a^3+b^3}$.

99. Упростите выражение:

а) $\dfrac{a^2+3ab-2a-6b}{a^2-9b^2} \cdot \dfrac{a-3b}{a^2-4}$;

б) $\dfrac{xy-5y^2+2x-10y}{4x^3-xy^2} \cdot \dfrac{y-2x}{x-5y}$;

в) $\dfrac{x^3-8}{25x^2} \cdot \dfrac{10x}{x^2+2x+4} \cdot \dfrac{15}{x^2+4x-12}$;

г) $\dfrac{y^3+27}{y^2-4} \cdot \dfrac{y+2}{y^2-3y+9} \cdot \dfrac{y^2+y-2}{y^2+4y+3}$.

100. Возведите в степень:

а) $\left(\dfrac{x}{2y}\right)^3$; в) $\left(\dfrac{a^2}{b^3}\right)^2$; д) $\left(-\dfrac{3x^2}{y^3}\right)^2$; ж) $\left(\dfrac{x^2-14x+49}{y^2-12x+35}\right)^3$;

б) $\left(\dfrac{2x}{3}\right)^4$; г) $\left(\dfrac{2a}{5b}\right)^3$; е) $\left(-\dfrac{2x^3}{3y^2}\right)^3$; з) $\left(\dfrac{6a^2-54}{(a-3)^3}\right)^2$.

101. Упростите выражение:

а) $\left(\dfrac{x-y}{x+y}\right)^3 \cdot \dfrac{(x-y)^2+4xy}{(x+y)^2-4xy}$;

б) $\left(\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^2 \cdot \dfrac{(a-b)^2+2ab}{(a-b)^2}$;

в) $\left(-\dfrac{x^2+xy}{xy-y^2}\right)^6 \cdot \left(\dfrac{2xy-x^2-y^2}{x^2+2xy+y^2}\right)^3$;

г) $\left(\dfrac{ab-5a+6b-30}{ab+6a+3b+18}\right)^4 \cdot \left(\dfrac{a^2+6a+9}{10b-b^2-25}\right)^2$.

102. Найдите значение выражения:

а) $\dfrac{9y^2 - 60y + 100}{9y^2 + 30y + 25} \cdot \dfrac{0{,}6y+1}{0{,}6y-2}$, если $y = -\dfrac{2}{3}$;

б) $\dfrac{0{,}2x^3-25}{6x^2-12x} \cdot \dfrac{0{,}1x-0{,}2}{0{,}2x^2+x+5}$, если $x = \dfrac{1}{5}$.

103. Упростите выражение $\dfrac{a^3 + 4a^2 + 10a + 12}{a^3 - a^2 + 2a + 16} \cdot \dfrac{a^3 - 3a^2 + 8a}{a^2 + 2a + 6}$.

Упражнения для повторения

104. Найдите частное и остаток от деления многочленов:

а) $a^4 + 5a^3 - 6a + 1$ и $a^2 - 3a + 1$;

б) $2b^4 - 6b^3 + 3b^2 - 2$ и $b^2 - b - 2$.

105. Средняя скорость пассажирского поезда на участке от A до B равна 80 км/ч, а товарного — 60 км/ч. Каково расстояние между A и B, если известно, что этот путь пассажирский поезд проходит на 12 минут быстрее, чем товарный?

106. Выразите x через a и b из уравнения:

а) $5x + b = a$; б) $2a - 3x = b$; в) $\dfrac{x}{b} = a$; г) $\dfrac{a}{x} = b$.

6. Деление дробей

Докажем, что частное двух дробей $\dfrac{a}{b}$ и $\dfrac{c}{d}$, где $b \neq 0$, $c \neq 0$ и $d \neq 0$, тождественно равно дроби $\dfrac{ad}{bc}$, т. е. имеет место тождество

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}. \qquad (1)$$

Умножим дробь $\dfrac{ad}{bc}$ на дробь $\dfrac{c}{d}$:

$$\frac{ad}{bc} \cdot \frac{c}{d} = \frac{adc}{bcd} = \frac{a}{b}.$$

Из тождества $\dfrac{ad}{bc} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{a}{b}$ по определению частного вытекает, что равенство (1) является тождеством.

Тождество (1) можно представить в виде:

$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$, где $\frac{d}{c}$ — дробь, обратная дроби $\frac{c}{d}$.

При делении одной дроби на другую удобно пользоваться правилом:

чтобы разделить дробь на дробь, нужно первую дробь умножить на дробь, обратную второй.

Пример 1. Разделим дробь $\frac{28a^6}{81b^5}$ на дробь $\frac{70a^5}{162b^4}$.

Применив правило, получим:

$$\frac{28a^6}{81b^5} : \frac{70a^5}{162b^4} = \frac{28a^6}{81b^5} \cdot \frac{162b^4}{70a^5} = \frac{4 \cdot 7 \cdot 81 \cdot 2a^6b^4}{81 \cdot 7 \cdot 10 \cdot a^5b^5} = \frac{4a}{5b}.$$

Пример 2. Выполним деление дроби $\frac{c^4 - 3c^2 + 1}{c^3 - 1}$ на дробь $\frac{c^2 - c - 1}{c^2 + c + 1}$.

Имеем:

$$\frac{c^4 - 3c^2 + 1}{c^3 - 1} : \frac{c^2 - c - 1}{c^2 + c + 1} = \frac{\left(c^2 - 1\right)^2 - c^2}{c^3 - 1} \cdot \frac{c^2 + c + 1}{c^2 - c - 1} =$$

$$= \frac{\left(c^2 - 1 + c\right)\left(c^2 - 1 - c\right)\left(c^2 + c + 1\right)}{(c - 1)\left(c^2 + c + 1\right)\left(c^2 - c - 1\right)} = \frac{c^2 + c - 1}{c - 1}.$$

Пример 3. Разделим дробь $\frac{c^2 + 6c + 9}{c - 5}$ на двучлен $c^2 + 3c$:

$$\frac{c^2 + 6c + 9}{c - 5} : (c^2 + 3c) = \frac{(c + 3)^2}{c - 5} \cdot \frac{1}{c(c + 3)} =$$

$$= \frac{(c + 3)^2 \cdot 1}{(c - 5) \cdot c(c + 3)} = \frac{c + 3}{c^2 - 5c}.$$

107. Выполните деление:

а) $\frac{3x}{4y} : \frac{9x^2}{8y^2}$;

б) $\frac{5x^2}{6y^2} : \frac{9x^2}{8y^2}$;

в) $\frac{a^3}{4b^3} : \frac{2b^2}{3a^2}$;

г) $\frac{2c^2}{121y} : \frac{1}{33y^2}$;

д) $\frac{13x}{b^2} : (169bx)$;

е) $144a^2 : \frac{24a^3}{5b}$.

108. Выполните действия (n — натуральное число, большее 6):

а) $\dfrac{3a^n}{4b^{2n+2}} : \dfrac{6a^{n-2}}{b^{2n}}$; в) $\dfrac{15a^{3n-1} \cdot b^n}{7c^{5n+1} \cdot d} : \dfrac{6a^{2n-3} \cdot b^{n-1}}{35c^{4n+1} \cdot d^n}$;

б) $\dfrac{x^{3n+5}}{y^{3n-2}} : \dfrac{x^{2n+6}}{y^{4n}}$; г) $\dfrac{x^{n+8} \cdot y^{n-5}}{p^{2n+9} \cdot q^{3n-1}} : \dfrac{x^{n+6} \cdot y^{n-7}}{p^{n+10} \cdot q^{2n}}$.

109. Представьте в виде дроби:

а) $\dfrac{7a^2x^2}{4y^3} : \dfrac{35a^3x^3}{8y^4}$; г) $-\dfrac{p^{10}}{q^{10}} : \dfrac{3p^5}{2q^5}$;

б) $-\dfrac{9ac}{13b} : \dfrac{18ab}{52c}$; д) $\dfrac{48x^{12}}{y^{16}} : (-16x^{10}y^4)$;

в) $\dfrac{42x^6}{17y^6} : \left(-\dfrac{21x^5}{51y^5}\right)$; е) $\dfrac{37a^8b}{c^3} : \left(-\dfrac{111a^7b^2}{c^2}\right)$.

110. Представьте в виде дроби:

а) $\dfrac{a-b}{c} : \dfrac{2a-2b}{c^2}$; г) $(x^2 - y^2) : \dfrac{5x+5y}{2xy}$;

б) $\dfrac{a^2-b^2}{4c^2} : \dfrac{a+b}{8c}$; д) $\dfrac{81a^2 - 49b^2}{ab} : (9a - 7b)$;

в) $\dfrac{a^2+ab}{ab-b^2} : \dfrac{ab+b^2}{a^2-ab}$; е) $(7a^3 + 875) : \dfrac{21a^3 - 105a^2 + 525a}{2a + 10}$.

111. Упростите:

а) $\dfrac{16n^2}{n^2-2n} : \dfrac{8n}{3n-6}$; г) $\dfrac{6a+12b}{a^2-2ab+b^2} : \dfrac{4a+8b}{a^2-b^2}$;

б) $\dfrac{x^2-1}{6x^2} : \dfrac{x^2+x}{3}$; д) $\dfrac{p^2+pq+q^2}{pq+3q^2} : \dfrac{p^3-q^3}{p^2-3pq}$;

в) $\dfrac{x-4}{y^2-xy} : \dfrac{5x-20}{x^2-xy}$; е) $\dfrac{a^3-8b^3}{a^2-3ab} : \dfrac{3a^2+6ab+12b^2}{3b^2-ab}$.

112. Найдите значение выражения:

а) $\dfrac{x^2+x+1}{4x+1} : \dfrac{x^3-1}{16x^2-1}$, если $x = \dfrac{1}{2}$;

б) $\dfrac{y^3-2y^2-3y+6}{4y^2+4y+1} : \dfrac{5y^2-15}{4y+2}$, если $y = -\dfrac{1}{2}$.

113. Упростите выражение:

а) $\frac{12a^4}{7b^2}\cdot\frac{3a^2}{2b^3}:\frac{18a^5}{35b^4}$; в) $\frac{x^2-y^2}{xy}\cdot\frac{6x^2}{x+y}:\frac{12x-12y}{5y^2}$;

б) $\frac{9x^6}{8y^6}:\frac{6x^4}{7y^4}\cdot\frac{y^3}{14x^3}$; г) $\frac{(x-y)^2}{x+2y}:\frac{(x-y)^3}{x^2-4y^2}\cdot\frac{x-y}{x-2y}$.

114. Выполните деление:

а) $\frac{x^2-bx+ax-ab}{x^2+bx-ax-ab}:\frac{x^2+bx+ax+ab}{x^2-bx-ax+ab}$;

б) $\frac{y^3-5y^2-4y+20}{y^3+5y^2+4y+20}:\frac{(y+2)^2-4y-8}{(y-2)^2+4y}$;

в) $\frac{a^2-10a+21}{b^2+11b+30}:\frac{a^2-49}{b^2-36}$;

г) $\frac{a^4-16}{b^6-8}:\frac{2a^2+8}{\left(b^2+2\right)^2-2b^2}$.

115. Упростите выражение:

а) $\left(\frac{x^2-10x+24}{x^2-2x-24}\right)^3:\left(\frac{4x-x^2}{5x+20}\right)^3$;

б) $\left(\frac{y^2-5y+6}{y^2+5y-6}\right)^3:\left(\frac{y^2-6y+9}{y^2+12y+36}\right)^3$.

116. Упростите выражение $\frac{\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2\right)\cdot\left(\frac{a+b}{2a}-\frac{b}{a+b}\right)}{\left(a+2b+\frac{b^2}{a}\right)\cdot\left(\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a-b}\right)}$ и найдите его значение при $a=0{,}75$, $b=\frac{4}{3}$.

Упражнения для повторения

117. Докажите тождество

$$\left(\frac{a^2-16}{a^2+8a+16}\right)^3\cdot\left(\frac{0{,}5a+2}{0{,}5a-2}\right)^3=1.$$

118. От станции до озера одну часть пути турист шел со скоростью 4 км/ч, а оставшуюся часть пути, которая на 1 км больше первоначальной, — со скоростью 6 км/ч. Каково расстояние от станции до озера, если известно, что на весь путь турист затратил 1 ч 25 мин?

119. Из равенства $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$ выразите:

а) переменную c через переменные a и b;
б) переменную a через переменные b и с.

7. Преобразование рациональных выражений

В курсе алгебры 7-го класса было показано, что сумму, разность и произведение многочленов всегда можно представить в виде многочлена. Дробь, у которой числитель и знаменатель многочлены, называют *рациональной дробью*. В этом курсе мы показали, что имеют место тождества:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd},\ \frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd},\ \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd},\ \frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}.$$

Значит, сумму, разность, произведение и частное рациональных дробей всегда можно представить в виде рациональной дроби. Следовательно, в виде рациональной дроби можно представить любое рациональное выражение.

Пример 1. Представим в виде рациональной дроби выражение

$$\left(\frac{2a+1}{2a-1}-\frac{2a-1}{2a+1}\right):\frac{8a}{6a^2-3a}.$$

Сначала выполним действие в скобках, а затем полученное выражение разделим на дробь $\frac{8a}{6a^2-3a}$:

1) $\frac{2a+1}{2a-1}-\frac{2a-1}{2a+1}=\frac{(2a+1)^2-(2a-1)^2}{4a^2-1}=\frac{8a}{4a^2-1}$;

2) $\frac{8a}{4a^2-1}:\frac{8a}{6a^2-3a}=\frac{8a\cdot 3a(2a-1)}{(2a-1)(2a+1)\cdot 8a}=\frac{3a}{2a+1}$.

Запись можно вести короче:

$$\left(\frac{2a+1}{2a-1}-\frac{2a-1}{2a+1}\right):\frac{8a}{6a^2-3a}=\frac{(2a+1)^2-(2a-1)^2}{(2a-1)(2a+1)}:\frac{8a}{3a(2a-1)}=$$

$$=\frac{8a\cdot 3a(2a-1)}{8a(2a-1)(2a+1)}=\frac{3a}{2a+1}.$$

При выполнении преобразований выражений вида $(a + b) \cdot c$ иногда бывает более рациональным не выполнять действия в скобках, а сразу воспользоваться распределительным свойством умножения.

П р и м е р 2. Упростим выражение:

$$\left(\frac{1}{(a-b)^2} - \frac{1}{(a+b)^2}\right) \cdot \left(a^2 - b^2\right)^2.$$

Воспользуемся распределительным свойством умножения, предварительно представив второй множитель в виде произведения $(a - b)^2(a + b)^2$.

Имеем:

$$\left(\frac{1}{(a-b)^2} - \frac{1}{(a+b)^2}\right) \cdot \left(a^2 - b^2\right)^2 =$$

$$= \frac{(a-b)^2(a+b)^2}{(a-b)^2} - \frac{(a-b)^2(a+b)^2}{(a+b)^2} = (a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab.$$

П р и м е р 3. Упростим выражение

$$\frac{4a+5}{2a} - \frac{4a^2+4a+1}{a^2-9} \cdot \frac{a+3}{2a+1}.$$

Сначала выполним умножение, затем полученный результат вычтем из дроби $\frac{4a+5}{2a}$:

1) $\frac{4a^2+4a+1}{a^2-9} \cdot \frac{a+3}{2a+1} = \frac{(2a+1)^2 \cdot (a+3)}{(a-3)(a+3)(2a+1)} = \frac{2a+1}{a-3}$;

2) $\frac{4a+5}{2a} - \frac{2a+1}{a-3} = \frac{(4a+5)(a-3)-2a(2a+1)}{2a(a-3)} =$

$$= \frac{4a^2+5a-12a-15-4a^2-2a}{2a(a-3)} = \frac{-9a-15}{2a^2-6a} = -\frac{9a+15}{2a^2-6a}.$$

П р и м е р 4. Докажем, что значение выражения

$$1 + \frac{x^3+1}{x^2-x} : \left(\frac{1}{x} + \frac{x}{(x-1)^2}\right)$$

при любых допустимых значениях x положительно.

Преобразуем данное выражение:

1) $\frac{1}{x}+\frac{x}{x^2-2x+1}=\frac{x^2-2x+1+x}{x(x-1)^2}=\frac{x^2-x+1}{x(x-1)^2}$;

2) $\frac{x^3+1}{x^2-x}:\frac{x^2-x+1}{x(x-1)^2}=\frac{(x+1)(x^2-x+1)\cdot x(x-1)^2}{x(x-1)\cdot(x^2-x+1)}=x^2-1$;

3) $1+x^2-1=x^2$.

Выражение x^2 при любых x — неотрицательное число. Однако число нуль не является допустимым значением переменной x. Следовательно, значение данного выражения — положительно при любом допустимом значении x.

Рассмотрим преобразования дробей, числитель и знаменатель которых являются дробными выражениями. Такие дроби обычно называют сложными («многоэтажными») дробями.

П р и м е р 5. Представим в виде рациональной дроби дробь:

а) $\dfrac{\dfrac{1-x}{1-x+x^2}+\dfrac{1+x}{1+x+x^2}}{\dfrac{1+x}{1+x+x^2}-\dfrac{1-x}{1-x+x^2}}$; б) $\dfrac{a+\dfrac{bc}{b+c}}{b+\dfrac{ac}{a+c}}$.

а) Числитель и знаменатель этой дроби являются дробями, которые имеют один и тот же общий знаменатель

$$(1-x+x^2)(1+x+x^2).$$

Поэтому, умножив числитель и знаменатель данной дроби на выражение $(1+x+x^2)(1-x+x^2)$, мы получим дробь, тождественно равную данной, у которой числитель и знаменатель являются целыми выражениями.

Имеем:

$$\frac{\dfrac{1-x}{1-x+x^2}+\dfrac{1+x}{1+x+x^2}}{\dfrac{1+x}{1+x+x^2}-\dfrac{1-x}{1-x+x^2}}=$$

$$=\frac{\left(\dfrac{1-x}{1-x+x^2}+\dfrac{1+x}{1+x+x^2}\right)\cdot(1-x+x^2)(1+x+x^2)}{\left(\dfrac{1+x}{1+x+x^2}-\dfrac{1-x}{1-x+x^2}\right)\cdot(1-x+x^2)(1+x+x^2)}=$$

$$=\frac{1-x^3+(1+x^3)}{1+x^3-(1-x^3)}=\frac{2}{2x^3}=\frac{1}{x^3}.$$

б) В этом случае целесообразно выполнить преобразования отдельно в числителе и знаменателе дроби, а затем первый результат разделить на второй.

Имеем:

$$\frac{a+\dfrac{bc}{b+c}}{b+\dfrac{ac}{a+c}} = \frac{\dfrac{ab+ac+bc}{b+c}}{\dfrac{ab+bc+ac}{a+c}} = \frac{ab+ac+bc}{b+c} : \frac{ab+bc+ac}{a+c} =$$

$$= \frac{(ab+ac+bc)(a+c)}{(b+c)(ab+bc+ac)} = \frac{a+c}{b+c}.$$

120. Представьте в виде рациональной дроби:

а) $\left(\dfrac{a}{a+2}+1\right)\cdot\dfrac{a+2}{4a}$; г) $\dfrac{2y-12}{y^2-25}\cdot\left(y+\dfrac{y}{y-6}\right)$;

б) $\left(\dfrac{2b}{1-b}-b\right):\dfrac{3b+3}{b-1}$; д) $\left(a-x+\dfrac{x^2}{a+x}\right)\cdot\dfrac{a-x}{a}$;

в) $\dfrac{3x^2}{x^2-1}:\left(1+\dfrac{1}{x-1}\right)$; е) $\left(2b+y-\dfrac{3y^2}{2b-y}\right)\cdot\dfrac{6b-3y}{b^2+by}$.

121. Выполните действия:

а) $\left(a-\dfrac{a^2}{a+b}\right)\cdot\left(\dfrac{a}{b^2}-\dfrac{1}{a}\right)$;

б) $\left(\dfrac{b}{c}+\dfrac{b^2}{c^2}\right):\left(\dfrac{b}{c}-\dfrac{c}{b}\right)$;

в) $\left(x-\dfrac{x^2+y^2}{x+y}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{y}+\dfrac{2}{x-y}\right)$;

г) $\left(\dfrac{2z}{2-z}-\dfrac{z}{2}\right):\left(1+\dfrac{z^2+4}{2z-4}\right)$;

д) $\left(a-1-\dfrac{3}{a+1}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{a-2}-\dfrac{1}{a^2-4}\right)$;

е) $\left(b+1-\dfrac{1}{1-b}\right):\left(b-\dfrac{b^2}{b-1}\right)$.

122. Упростите выражение:

а) $\dfrac{xy+2x}{7} : \dfrac{x^3}{7y+14} - \dfrac{2y+3}{x^2}$;

б) $\dfrac{2a-b}{2a} - \dfrac{3b}{4a^2} \cdot \dfrac{4a^2-2ab}{3b}$;

в) $\dfrac{m^2-n^2}{5n^2} \cdot \dfrac{10n^2}{m^4-m^2n^2} - 2$;

г) $\dfrac{2pq}{2p-q} - \dfrac{4p^2-2pq+q^2}{2p+q} \cdot \dfrac{2p+q}{2p-q}$.

123. Выполните действия:

а) $(a^2 - x^2) \cdot \left(\dfrac{1}{a+x} + \dfrac{1}{a^2-x^2} - \dfrac{1}{a-x}\right)$;

б) $\dfrac{by}{b^2-y^2} : \left(\dfrac{1}{b^2-y^2} + \dfrac{1}{b^2+2by+y^2}\right)$;

в) $\left(x^2 + \dfrac{27}{x}\right) \cdot \left(\dfrac{1}{x+3} + \dfrac{1}{x^2-3x+9}\right)$;

г) $\left(x - \dfrac{1}{x}\right) \cdot \left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x+1} + 5\right)$;

д) $\left(\dfrac{a+b}{a-b} - \dfrac{a-b}{a+b}\right) : \left(\dfrac{a-b}{a+b} + \dfrac{a+b}{a-b}\right)$;

е) $\left(\dfrac{1}{x-y} - \dfrac{1}{x+y}\right) \cdot \left(x - \dfrac{3x+y}{4}\right)$.

124. Упростите выражение:

а) $\dfrac{x-1}{3x} : \left(\dfrac{1}{3x-6y} \cdot \left(2y - x - \dfrac{2y-x}{x}\right)\right)$;

б) $\left(3a - 2b + \dfrac{2b-3a}{2a}\right) : \left(a - \dfrac{1}{2}\right) \cdot \dfrac{a^2}{9a^2-4b^2}$;

в) $\dfrac{4y^2-1}{y^3-y^2-y+1} : \left(\dfrac{y}{y^2-2y+1} + \dfrac{y}{y^2-1} - \dfrac{2}{y+1}\right)$;

г) $\left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{(x-1)^2} + \dfrac{x+1}{x(x-1)^2}\right) \cdot \dfrac{x-1}{x^3+1}$.

125. Докажите, что при любых допустимых значениях переменной x значение выражения не зависит от x:

а) $\left(2 + \dfrac{x^2}{x+2}\right) \cdot \left(\dfrac{1}{x-2} - \dfrac{12}{x^3-8} - \dfrac{2}{x^2+2x+4}\right)$;

б) $\left(\dfrac{6}{2-x} - \dfrac{6x}{8-x^3} \cdot \dfrac{x^2+2x+4}{x+2}\right) - \dfrac{3x^2}{4-x^2}$.

126. Докажите тождество:

а) $\left(a - \frac{4ab}{a+b} + b\right) : (a - b) + 1 = \frac{2a}{a+b}$;

б) $\left(\frac{1}{(a-2)^2} - \frac{2}{a^2-4} + \frac{1}{(a+2)^2}\right) \cdot (a^2 - 4)^2 = 16$;

в) $\left(\frac{a-0,2b}{5a^2+ab+0,2b^2} + \frac{0,6ab}{5a^3-0,04b^3} + \frac{0,2}{a-0,2b}\right) \cdot \frac{5a-b}{2} = 1$;

г) $\left(\frac{9}{(x+3)^2} + \frac{18}{x^2-9} + \frac{9}{(x-3)^2}\right) \cdot \left(\frac{x}{3} - \frac{3}{x}\right)^2 = 4$.

127. Упростите выражение:

а) $\left(\frac{y+1}{y^3 - 4y^2 + 4y - 1} - \frac{y-1}{y^3 - 2y^2 - 2y + 1}\right) : \frac{4}{y^2 - 3y + 1}$;

б) $\left(\frac{4x^2 + 8}{x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 4x + 2} - \frac{4 - x^2}{(x-1)^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right)$.

128. Представьте в виде рациональной дроби:

а) $\dfrac{\frac{2a-b}{b}+1}{\frac{2a^2+b}{b}-1}$; в) $\dfrac{1-\frac{1}{x}}{x+\frac{1}{x}-2}$;

б) $\dfrac{\frac{a}{b^2}+\frac{b}{a^2}}{\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}}$; г) $\dfrac{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}+x+3\left(\frac{1}{x}+1\right)}$.

129. Докажите тождество:

а) $\dfrac{\left(\frac{a^3}{(b-1)^3} + 1\right)\left(\frac{a}{b-1} - 1\right)}{\left(\frac{a^2}{(b-1)^2} - 1\right)\left(\frac{a^2}{(b-1)^2} - \frac{a}{b-1} + 1\right)} = 1$;

б) $\dfrac{\frac{x^6 + y^6}{x^3y^3} \cdot \left(\frac{x^3}{y^3} - \frac{y^3}{x^3}\right)}{\frac{x^4}{y^4} + \frac{y^4}{x^4} + 1} + \frac{y^2}{x^2} = \frac{x^2}{y^2}$.

130. Найдите наименьшее значение выражения

$$\frac{x^2-9}{2} \cdot \left(\frac{x+3}{x-3} + \frac{x-3}{x+3}\right).$$

131. Найдите наибольшее значение выражения

$$\frac{4}{\left(\frac{x}{2}+1\right)^2+\left(\frac{x}{2}-1\right)^2}.$$

Упражнения для повторения

132. Докажите, что если $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$, то верно равенство:

а) $\frac{a^2+b^2}{b^2+c^2}=\frac{a^2}{b^2}$; б) $\left(\frac{a+b}{b+c}\right)^2=\frac{a}{c}$.

133. Моторная лодка прошла против течения реки 16 км и вернулась обратно, затратив на обратный путь на 40 минут меньше, чем на путь против течения. Скорость течения реки 2 км/ч. Найдите скорость лодки в стоячей воде.

Контрольные вопросы и задания

1. Сформулируйте правило умножения дробей. Приведите пример.
2. В чем состоит правило возведения дроби в степень?
3. Сформулируйте правило деления одной дроби на другую. Приведите пример.
4. Представьте выражение $\frac{2x^3+8x}{\left(x^2-4\right)^3}:\left(\frac{1}{(x-2)^2}+\frac{1}{(x+2)^2}\right)$ в виде рациональной дроби.
5. Почему любое рациональное выражение можно представить в виде многочлена или рациональной дроби?

Дополнительные упражнения к главе 1

К параграфу 1

134. Найдите значение дроби:

а) $\dfrac{2\frac{6}{7}\cdot 0{,}35}{16\frac{2}{5}:6\frac{5}{6}}$; в) $\dfrac{37^2+111}{40}$;

б) $\dfrac{\frac{5}{6}\cdot 1{,}2+31}{7{,}2\cdot\frac{5}{9}}$; г) $\dfrac{395+79^2}{84}$.

135. Найдите значение дроби:

а) $3 - \dfrac{2}{1 + \dfrac{2}{1 - \dfrac{2}{1 + \dfrac{2}{1}}}}$; б) $1 + \dfrac{3}{1 - \dfrac{3}{1 + \dfrac{3}{1}}}$.

136. При каких целых значениях n дробь принимает целые значения:

а) $\dfrac{91}{3n + 5}$; в) $\dfrac{159}{6n + 1}$; д) $\dfrac{5}{n^2 - 4}$;

б) $\dfrac{123}{4n - 1}$; г) $\dfrac{205}{7n + 2}$; е) $\dfrac{6}{n^2 - 3}$?

137. При каких значениях переменной имеет смысл дробь:

а) $\dfrac{1}{x^3 - 9x}$; в) $\dfrac{8}{|x| - 2}$; д) $\dfrac{\dfrac{2}{x} - 6}{3 - \dfrac{9}{x}}$;

б) $\dfrac{1}{x^5 - 16x}$; г) $\dfrac{45}{|x| + 5}$; е) $\dfrac{\dfrac{1}{x - 2}}{|x| - x}$?

138. Найдите область определения функции:

а) $y = \dfrac{x}{x^2 - 49}$; б) $y = \dfrac{1}{y^3 - 16x}$; в) $y = \dfrac{7}{|x| - x}$.

139. При каких значениях a значение дроби равно нулю:

а) $\dfrac{a^2 - 169}{a}$; б) $\dfrac{|a| - 5}{3}$; в) $\dfrac{a - |a|}{7}$?

140. Зная, что a, b, c и d — отличные от нуля числа и $ad = bc$, докажите, что:

а) $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$; г) $\dfrac{a + c}{b + d} = \dfrac{a}{b}$;

б) $\dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{d}$; д) $\dfrac{b}{a + nb} = \dfrac{d}{c + nd}$;

в) $\dfrac{a + b}{b} = \dfrac{c + d}{d}$; е) $\dfrac{2a + b}{2c + d} = \dfrac{a}{c}$.

Замечание. Последнюю пропорцию доказал Архимед в III в. до н. э.

141. Сократите дробь:

а) $\dfrac{(x+1)^3+1}{x^3-1}$; г) $\dfrac{b^8-b^5-b^3+1}{b^6-b^5-b+1}$;

б) $\dfrac{(y-1)^3-1}{y^3+1}$; д) $\dfrac{a^2+3ab-2ac-6bc}{a^2-3ab-2ac+6bc}$;

в) $\dfrac{a^4+a^2+1}{(a+1)^3+1}$; е) $\dfrac{b^2-bx-6by+6xy}{b^3-12b^2y+36by^2}$.

142. Упростите выражение:

а) $\dfrac{a^4+a^2+1}{a^8+a^4+1}$; б) $\dfrac{b^8+4}{(b^4+2b^2+2)(b^4-2b^2+2)}$.

143. Докажите, что если у дроби $\dfrac{2x^2-5xy+7y^2}{3x^2+6xy-8y^2}$ переменные x и y заменить соответственно на kx и ky, где $k \neq 0$, то получится дробь, тождественно равная первоначальной.

144. Найдите ошибку в рассуждениях.

Пусть дано уравнение $x - a = 0$. Разделив обе его части на $x - a$, получим $\dfrac{x-a}{x-a} = \dfrac{0}{x-a}$, откуда сразу же получаем равенство $1 = 0$.

Архимед (около 287—212 гг. до н. э.), древнегреческий математик и физик; развил методы вычисления площадей различных фигур и объемов тел, а также методы касательных и экстремумов, предвосхитив интегральное и дифференциальное исчисления; широко применял математические методы в естествознании и технике.

145. Найдите значение дроби:

а) $\dfrac{a^2-3ab+2b^2}{a^2+5ab-4b^2}$ при $a = \dfrac{3}{8}$ и $b = \dfrac{5}{8}$;

б) $\dfrac{2x^3+3x^2y+5xy^2+y^2}{(2x+8y)^3}$ при $x = \dfrac{1}{13}$ и $y = \dfrac{2}{13}$.

146. Известно, что a и c — натуральные числа и $b = a + c$. Найдите значение дроби $\dfrac{10a+c}{100a+10b+c}$.

147. Докажите, что функция $y = \dfrac{2x^3-3x^2+4x-6}{x^2+2}$ является линейной функцией.

148. Докажите тождество $\dfrac{0{,}5x^2-xy}{0{,}25x^2-y^2} = \dfrac{2x}{x+2y}$.

149. Найдите значение дроби $\dfrac{a+0{,}1b}{10a^2+2ab+0{,}1b^2}$, если известно, что:

а) $10a + b = 20$; б) $2a + 0{,}2b = 5$.

150. Постройте график функции:

а) $y = \dfrac{x^2-4}{|x|-2}$; б) $y = \dfrac{|x-2|}{x-2}$.

К параграфу 2

151. Выполните сложение или вычитание:

а) $\dfrac{x^{3n}-9}{x^{2n}+4x^n-21} - \dfrac{18}{x^{2n}+4x^n-21}$;

б) $\dfrac{a^{2n}+1}{a^{2n}-a^n-20} + \dfrac{26}{20+a^n-a^{2n}}$;

в) $\dfrac{4a^{2n+1}-5a^{n+1}b^n}{\left(2a^n-3b^n\right)^3} - \dfrac{-7a^{n+1}b^n+9ab^{2n}}{\left(3b^n-2a^n\right)^3}$;

г) $\dfrac{a^{2n}-b^{2n}}{a^n+b^n-1} - \dfrac{a^n-b^n}{a^n+b^n-1}$.

152. Упростите выражение

$$\frac{(a+b)^2}{a+b+c}-\frac{(b-c)^2+2bc}{a+b+c}+\frac{(c+a)^2}{a+b+c}.$$

153. Докажите тождество

$$\frac{1}{a^2+2ab-3b^2}+\frac{1}{b^2+2ab-3a^2}=\frac{2}{(a+3b)(3a+b)}.$$

154. Найдите значение выражения

$$\frac{x-4}{x^2-6x+8}+\frac{3x-18}{x^2-8x+12}$$

при $x = 2{,}5$.

155. Упростите выражение:

а) $\dfrac{x}{x+0{,}5y}-\dfrac{xy-2x^2}{x^2-0{,}25y^2}$;

б) $\dfrac{xy-1{,}2y^2}{x^2-1{,}2xy}+\dfrac{x^2+0{,}4xy}{xy+0{,}4y^2}$;

в) $\dfrac{2a^2-a}{a^2-a+\frac{1}{4}}-\dfrac{2a^2+a}{a^2+a+\frac{1}{4}}+\dfrac{1}{a^2-\frac{1}{4}}$;

г) $\dfrac{3b-y}{b^2-\frac{2}{3}by+\frac{1}{9}y^2}-\dfrac{3b+y}{b^2+\frac{2}{3}by+\frac{1}{9}y^2}-\dfrac{6b}{b^2-\frac{1}{9}y^2}$.

156. Упростите выражение:

а) $\dfrac{1}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{1}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{1}{(c-a)(c-b)}$;

б) $\dfrac{a}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c}{(c-a)(c-b)}$;

в) $\dfrac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^2}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c^2}{(c-a)(c-b)}$.

157. Представьте дробь $\dfrac{2}{3}$ в виде суммы трех дробей со знаменателями:

а) 5, 6 и 10; б) 3, 5 и 15.

158. Найдите значения a, b и c, при которых равенство

$$\frac{x^2-x+1}{(x-1)^3} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{(x-1)^3}$$

является тождеством.

159. Представьте дробь в виде суммы трех дробей, знаменателями которых являются многочлены первой степени:

а) $\dfrac{3x^2-4}{x^3-4x}$; б) $\dfrac{2y^2-5y+3}{y^3-4y^2+3y}$; в) $\dfrac{3z^2+6z+2}{z^3+3z^2+2z}$.

160. Найдите значение дроби:

а) $\dfrac{x^3+x^2-x+2}{x^2-x+1}$ при $x = -1{,}75$;

б) $\dfrac{y^3-y^2-\frac{1}{2}y-\frac{3}{8}}{y^2+\frac{1}{2}y+\frac{1}{4}}$ при $y = 2{,}5$.

161. Найдите все целые значения дроби, зная, что $n \in N$:

а) $\dfrac{n^2-4}{n+3}$; в) $\dfrac{n^3-n^2-n+7}{n+1}$;

б) $\dfrac{n^2-3n-15}{n-5}$; г) $\dfrac{(n-1)(n+1)^2-1}{n-1}$.

162. Найдите целые значения a, при которых дробь принимает целые значения:

а) $\dfrac{(a-2)^2}{4a}$; б) $\dfrac{81+\frac{108}{a}+\frac{36}{a^2}}{(3a+2)^2}$.

163. Укажите натуральные значения a и b, при которых верно равенство $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{3}$.

164. Ученик, решая уравнение $\dfrac{x+5}{x-7} - 5 = \dfrac{4x-40}{13-x}$, привел его левую часть к общему знаменателю и получил $\dfrac{x+5-5(x-7)}{x-7} = \dfrac{4x-40}{13-x}$. Отсюда он получил равенство $\dfrac{4x-40}{7-x} = \dfrac{4x-40}{13-x}$. Далее ученик рассуждал так: поскольку числители дробей равны, то равны и знаменатели, т. е. $7 - x = 13 - x$, откуда $7 = 13$. Какую ошибку допустил ученик?

165. Докажите, что значение выражения

$$\left(\frac{x^{3n}}{x^n-1}+\frac{1}{x^n+1}\right)-\left(\frac{x^{2n}}{x^n+1}+\frac{1}{x^n-1}\right)$$

при целом x, отличном от 1, и натуральном n является натуральным числом.

К параграфу 3

166. Упростите выражение:

а) $\dfrac{x^5+x^4+x^3}{x^5-x^4+x^3}\cdot\dfrac{x^5+x^2}{x^5-x^2}$;

б) $\dfrac{a^2+ax+ab+bx}{a^2-ax-ab+bx}\cdot\dfrac{a^2-ax-bx+ab}{a^2+ax-bx-ab}$;

в) $\dfrac{x^4+x^2y^2}{x^2-2x-2y-y^2}\cdot\dfrac{x^2-xy-2x}{x^3+x^2y+xy^2+y^3}$;

г) $\dfrac{10a^2+40ab+40b^2}{a^2-3a+6b-4b^2}\cdot\dfrac{a^2+2ab-3a}{5a+10b}$.

167. Выполните умножение:

а) $\dfrac{4x^4+4x^2y+y^2-4}{4x^2+2y-4}\cdot\dfrac{6xy}{4x^2+2y+4}$;

б) $\dfrac{9a^2-6ab^2+b^4-9}{12(a+1)-4b^2}\cdot\dfrac{12ab}{3(a-1)-b^2}$.

168. Упростите выражение:

а) $\left(x^2+\dfrac{1}{x}\right)\cdot\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{x}-1}$;

в) $\dfrac{x^3y^3}{x^2+y^2}\cdot\dfrac{x^2-y^2}{x^3+y^3}\cdot\left(\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{y^3}\right)$;

б) $\left(y^2-\dfrac{8}{y}\right)\cdot\dfrac{1}{y+\dfrac{4}{y}+2}$;

г) $\dfrac{x^4y^3+x^3y^4}{(x+y)^2-xy}\cdot\left(\dfrac{1}{y^3}-\dfrac{1}{x^3}\right)$.

169. Докажите, что если a, b и c отличны от нуля, то равенство верно:

а) $\dfrac{(a+b)^2}{(b+c)^2}=\dfrac{a^2}{b^2}$ при условии, что $\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{c}$;

б) $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{a+b+c}$ при условии, что $(a+b)(b+c)=0$.

170. Упростите выражение:

а) $\dfrac{x^2-30yz+10xz-3xy}{z^2-xz} : \dfrac{x^2-100z^2}{x^2-xz}$;

б) $\dfrac{a^6-b^6}{a^2+a-3b-9b^2} : \dfrac{\left(a^2+b^2\right)^2-a^2b^2}{a-3b}$;

в) $\dfrac{6xy-4x-9y+6}{x^2-12x+36} : \dfrac{9y^2-12x+4}{3xy-18y-2x+12}$.

171. Зная, что $a + b + c = 0$, найдите значение выражения:

а) $\dfrac{a+2b+c}{a+8b+c} : \dfrac{2a+4b-3c}{3a+7b-7c}$;

б) $\dfrac{3a+4b-7c}{4a+5b-6c} : \dfrac{2a+b+c}{7a+b+c}$.

172. Представьте в виде дроби:

а) $\left(\dfrac{4a^2-12ab+9b^2}{4a^2+12ab+9b^2}\right)^4 : \left(\dfrac{\frac{1}{3}a^2-ab+\frac{3}{4}b^2}{\frac{1}{3}a^2+ab+\frac{3}{4}b^2}\right)^3$;

б) $\left(\dfrac{0{,}2a^2+ab}{0{,}2b^2+ab}\right)^6 : \left(\dfrac{a^2+10ab+25b^2}{25a^2+10ab+b^2}\right)^3$.

173. Докажите тождество

$$2\left(\frac{a+b}{a-b}+\frac{a-b}{a+b}\right):\left(\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}\right)=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}.$$

174. Упростите выражение:

а) $\left(a+\dfrac{a-b}{a+b}-b\right):\left(\dfrac{2a+1}{a^2-b^2}+1\right)$;

б) $\left(x-\dfrac{x+y}{x-y}+y\right):\left(1-\dfrac{2y+1}{x^2-y^2}\right)$;

в) $\dfrac{2cd}{2c+d}\cdot\left(\dfrac{2c+d}{2c-d}-2c-d\right)+2cd$;

г) $\dfrac{3y}{3x+3y}+\dfrac{2x}{2x-3y}\cdot\left(9y^2-6xy+\dfrac{9y^2-6xy}{4x^2-6xy}\right)$.

175. Докажите, что при любом натуральном n является натуральным числом значение выражения:

а) $\left(\frac{1}{n}+1\right)\left(n+\frac{1}{n}-1\right):\frac{1}{n^2}$;

б) $\left(\frac{4}{n^2}+\frac{n}{2}\right):\left(\frac{2}{n^2}-\frac{1}{n}+\frac{1}{2}\right)$.

176. Докажите, что если $\frac{x_1}{x_2}=\frac{x_2}{x_3}=\frac{x_3}{x_4}$, то:

а) $\frac{x_1+x_2+x_3}{x_2+x_3+x_4}=\frac{x_1}{x_2}$;

б) $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{x_2+x_3+x_4}\right)^3=\frac{x_1}{x_4}$.

177. Докажите, что при любом m, отличном от нуля, значение выражения

$$\left(2m^2+\frac{1}{2m^2-1}+1\right):\left(2m^2-\frac{4m^4}{2m^2-1}\right)$$

является отрицательным числом.

178. Упростите выражение:

а) $\left(\frac{0{,}5b-1{,}5}{0{,}5b^2-1{,}5b+4{,}5}-\frac{2b-6}{\frac{1}{3}b^3+9}\right):\frac{b-3}{0{,}8b^3+21{,}6}$;

б) $\left(\frac{a}{0{,}5a+1}+\frac{\frac{2}{3}a}{2-a}+\frac{2a}{\frac{1}{4}a^2-1}\right)\cdot\frac{0{,}5a-1}{2{,}5a-2}$;

в) $\left(\frac{3{,}6xy+2{,}1y^2}{1{,}44x^2-0{,}49y^2}+\frac{2x}{2{,}4x+1{,}4y}\right)\cdot\frac{12x^2+7xy}{x+3y}$;

г) $\left(\frac{1}{0{,}5x+y}-\frac{2y}{0{,}25x^2+xy+y^2}\right):\left(\frac{0{,}5x}{0{,}25x^2-y^2}+\frac{1}{2y-x}\right)+2$.

179. Представьте в виде рациональной дроби:

а) $\dfrac{x-\frac{yz}{y-z}}{y-\frac{xz}{x-z}}$;

в) $\dfrac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}}$;

б) $\dfrac{\frac{a-x}{a}+\frac{x}{a-x}}{\frac{a+x}{a}-\frac{x}{a+x}}$;

г) $\dfrac{1}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{y}}}}$.

180. Выполните подстановку и упростите полученное выражение:

а) $\dfrac{ax}{a+x} - \dfrac{bx}{b-x}$, где $x = \dfrac{ab}{a-b}$;

б) $\dfrac{\dfrac{a}{b}-x}{\dfrac{b}{a}+x}$, где $x = \dfrac{a-b}{a+b}$.

181. Упростите выражение:

а) $\left(\dfrac{z-2}{6z+(z-2)^2} + \dfrac{(z+4)^2-12}{z^3-8} - \dfrac{1}{z-2}\right) : \dfrac{z^3+2z^2+2z+4}{z^3-2z^2+2z-4}$;

б) $\left(\dfrac{bx+4+\dfrac{4}{bx}}{2b+(b^2-4)x-2bx^2} + \dfrac{(4x^2-b^2)\cdot\dfrac{1}{b}}{(b+2x)^2-8bx}\right)\cdot\dfrac{bx}{2}$.

ГЛАВА 2 ЦЕЛЫЕ ЧИСЛА. ДЕЛИМОСТЬ ЧИСЕЛ

§ 4. МНОЖЕСТВО НАТУРАЛЬНЫХ И МНОЖЕСТВО ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ

8. Пересечение и объединение множеств

В курсе математики 7-го класса вы познакомились с понятиями: множество, элемент множества, подмножество данного множества.

Напомним, что множества бывают конечные и бесконечные. Множество, не содержащее ни одного элемента, называется *пустым множеством*. Пустое множество обозначается знаком $\varnothing$. Если каждый элемент множества B является элементом множества A, то множество B называют *подмножеством* множества A и пишут $B \subset A$.

Если $B \subset A$ и $B \neq A$, $B \neq \varnothing$, то B называют собственным подмножеством множества A.

Остановимся теперь на понятиях пересечения и объединения множеств.

Пусть A — множество простых двузначных чисел, B — множество двузначных чисел, оканчивающихся цифрой 1:

$A = \{11, 13, 17, 19, \ldots, 79, 83, 89, 97\}$,

$B = \{11, 21, 31, 41, 51, 61, 71, 81, 91\}$.

Рассмотрим множество C, составленное из общих элементов этих множеств. Общими элементами множеств A и B являются простые двузначные числа, оканчивающиеся цифрой 1, т. е.:

$$C = \{11, 31, 41, 61, 71\}.$$

Говорят, что множество C является *пересечением* множеств A и B.

На рисунке 2 множества A и B изображены с помощью кругов Эйлера. Фигура, образовавшаяся при пересечении кругов, показанная на рисунке штриховкой, изображает множество C.

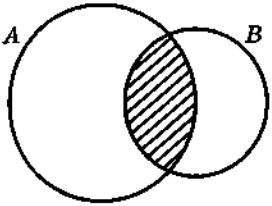
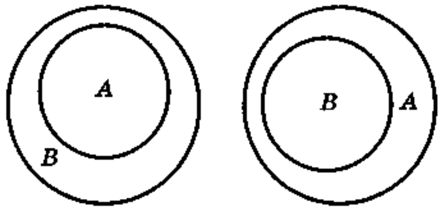


Рис. 2



$A \subset B$ $\quad$ $B \subset A$

Рис. 3

О п р е д е л е н и е. **Пересечением двух множеств называется множество, состоящее из всех общих элементов этих множеств.**

Пересечение множеств A и B обозначают так: $A \cap B$.

Из определения следует, что пересечение множеств A и B содержит те и только те элементы, которые принадлежат как множеству A, так и множеству B, т. е. любой элемент x, принадлежащий пересечению множеств A и B, обладает свойством: $x \in A$ и $x \in B$. Используя задание множества с помощью его характеристического свойства, можно записать:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}.$$

Если множества A и B не имеют общих элементов, то их пересечением является пустое множество, т. е. в этом случае $A \cap B = \varnothing$. Очевидно, что $A \cap A = A$, $A \cap \varnothing = \varnothing$.

Заметим также, что если $A \subset B$, то $A \cap B = A$, а если $B \subset A$, то $A \cap B = B$ (рис. 3).

Вернемся к рассмотренным множествам A и B, где A — множество простых двузначных чисел, B — множество двузначных чисел, оканчивающихся цифрой 1. Рассмотрим теперь множество K, которому принадлежат все элементы множества A и все элементы множества B. Множество K составлено из всех двузначных чисел, которые являются простыми или оканчиваются цифрой 1, т. е.

$$K = \{11, 13, 17, 19, 21, \ldots, 83, 89, 91, 97\}.$$

Говорят, что множество K является *объединением* множеств A и B.

На рисунке 4 множества A и B изображены с помощью кругов Эйлера. Фигура, объединяющая все точки, принадлежащие первому кругу, и все точки,

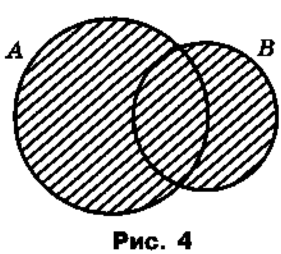


Рис. 4

принадлежащие второму кругу, показанная на рисунке штриховкой, изображает множество K.

Определение. **Объединением двух множеств называется множество, состоящее из всех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из этих множеств.**

Объединение множеств A и B обозначается так: $A \cup B$.

Из определения следует, что объединение множеств A и B содержит те и только те элементы, которые принадлежат хотя бы одному из этих множеств, т. е. любой элемент x из множества $A \cup B$ обладает свойством: $x \in A$ или $x \in B$. Это можно записать так:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}.$$

Очевидно, что $A \cup \varnothing = A$, $A \cup A = A$.

Заметим также, что если $A \subset B$, то $A \cup B = B$, а если $B \subset A$, то $A \cup B = A$.

Приведем примеры.

Пример 1. Найдем пересечение и объединение множеств цифр, которые встречаются в записи чисел 162 655 и 255 424.

Пусть P — множество цифр, которые используются в записи первого числа, а L — множество цифр, которые используются в записи второго числа. Тогда

$$P = \{1, 2, 5, 6\},$$
$$L = \{2, 4, 5\}.$$

Пересечением множеств P и L является множество M, составленное из цифр, которые встречаются в записи обоих чисел, т. е.

$$M = \{2, 5\}.$$

Объединением множеств P и L служит множество F, которому принадлежат все цифры, использованные при записи как первого числа, так и второго. Чтобы задать множество F перечислением элементов, выпишем сначала все элементы множества P, а затем припишем к ним недостающие элементы из множества L. Получим, что

$$F = \{1, 2, 5, 6, 4\}.$$

Пример 2. Найдем пересечение и объединение множеств C и D, если C — множество точек (x, y), где x — любое число, $2 \leqslant y \leqslant 3$, а D — множество точек (x, y), где $1 \leqslant x \leqslant 4$, y — любое число.

Множество C — горизонтальная полоса, ограниченная прямыми $y = 2$ и $y = 3$, а множество D — вертикальная полоса, ограниченная прямыми $x = 1$ и $x = 4$. Пересечением множеств C и D служит множество их общих точек, т. е. прямоугольник, образованный при пересечении этих полос. Объединением множеств C и D служит множество, состоящее из всех точек горизонтальной полосы и всех точек вертикальной полосы (рис. 5).

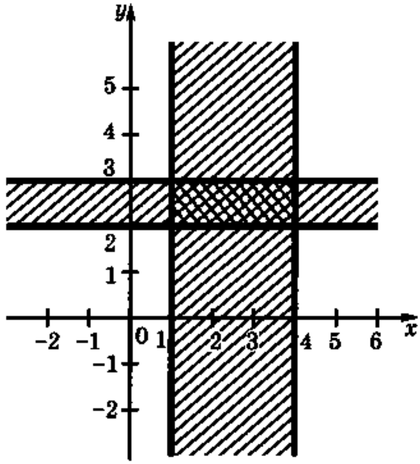


Рис. 5

Выясним теперь, как связаны между собой число элементов двух конечных множеств и число элементов их пересечения и объединения.

Пусть A и B — некоторые конечные множества, $n(A)$ и $n(B)$ — число элементов этих множеств, $n(A \cap B)$ и $n(A \cup B)$ — число элементов пересечения и объединения множеств.

Если множества A и B не имеют общих элементов, т. е. $A \cap B = \varnothing$, то очевидно, что

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B).$$

Если же $A \cap B \neq \varnothing$, то, как видно из рисунка 2, в сумму $n(A) + n(B)$ дважды входит число элементов их пересечения, т. е. $n(A \cap B)$. Поэтому в этом случае

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B).$$

Заметим, что эта формула включает и первый случай, когда $A \cap B = \varnothing$, так как в этом случае $n(A \cap B) = 0$.

П р и м е р 3. В туристическую группу, отправляющуюся в зарубежную поездку, входят 28 человек, каждый из которых владеет английским или немецким языком, причем некоторые владеют обоими языками. Известно, что 18 человек владеют английским языком, а 15 человек — немецким языком. Сколько человек в группе владеет двумя этими языками?

Пусть A — множество туристов, владеющих английским языком, B — множество туристов, владеющих немецким языком. Тогда $n(A) = 18$, $n(B) = 15$, $n(A \cup B) = 28$. Из формулы $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ находим, что

$28 = 18 + 15 - n(A \cap B)$, т. е. $n(A \cap B) = 5$.

Следовательно, в группе 5 туристов владеют двумя указанными языками.

182. Найдите пересечение и объединение множеств цифр, используемых в записи чисел:

а) 122 568 и 325 186; б) 483 501 и 272 557.

183. Найдите пересечение и объединение множеств букв, используемых в записи:

а) слов: «меридиан» и «медиана»,
б) пословиц: «Тише едешь — дальше будешь», «Что посеешь, то и пожнешь».

184. Пусть A — множество простых чисел, B — множество двузначных чисел, оканчивающихся цифрой 7. Принадлежат ли:

а) пересечению этих множеств числа 37, 47, 57;
б) объединению этих множеств числа 11, 81, 97?

185. Пусть A — множество квадратов натуральных чисел, B — множество кубов натуральных чисел. Принадлежат ли:

а) пересечению множеств A и B числа 8; 64; 729;
б) объединению множеств A и B числа 8; 16; 125?

186. Изобразите на координатной плоскости множества A и B и укажите, какую фигуру представляет собой пересечение этих множеств, если:

а) $A = \{(x; y) \mid x$ — любое число, $2 \leqslant y \leqslant 5\}$,
$B = \{(x; y) \mid 2 \leqslant x \leqslant 5$, y — любое число$\}$;
б) $A = \{(x; y) \mid x$ — любое число, $3 \leqslant y \leqslant 7\}$,
$B = \{(x; y) \mid 1 \leqslant x \leqslant 6$, y — любое число$\}$.

187. Начертите два каких-либо прямоугольника так, чтобы их пересечением был:

а) треугольник; б) шестиугольник.

188. Известно, что A — множество выпускников, окончивших школу с оценкой «5» по физике, а B — множество выпускников, окончивших школу с оценкой «5» по химии. Охарактеризуйте множество: а) $A \cap B$, б) $A \cup B$.

В каком случае $A \cap B = \varnothing$, $A \cup B = A$?

189. Охарактеризуйте пересечение множеств A и B, если:

а) A — множество прямоугольных треугольников, B — множество равнобедренных треугольников;

б) A — множество прямоугольников, B — множество ромбов.

190. В классе 26 учащихся, каждый из которых любит читать фантастику или детективы. Известно, что 19 учеников увлекаются фантастикой, а 14 — детективами. Сколько учащихся этого класса любят читать и фантастику, и детективы?

191. В поселке 56 человек занимаются охотой или рыбной ловлей. Из них 27 человек занимаются охотой, а 47 — рыбной ловлей. Сколько человек в поселке занимаются и охотой, и рыбной ловлей?

192. Из 68 учащихся восьмых классов, писавших контрольную работу по геометрии, каждый решил хотя бы одну из двух предложенных задач. Известно, что 32 ученика решили обе задачи, а 53 ученика решили только первую задачу. Сколько учащихся решили вторую задачу?

193. В офисе туристической фирмы работают сотрудники, каждый из которых знает хотя бы один иностранный язык. 6 человек знают английский, 6 — немецкий, 7 — французский, 4 знают английский и немецкий языки, 3 — немецкий и французский, 2 — французский и английский. Все три языка знает один сотрудник. Сколько человек работает в офисе туристической фирмы? Сколько человек из них знают только английский язык?

194. Староста одной группы института подал в деканат следующие сведения о студентах: «В группе учатся 45 студентов, из которых 25 юношей. 30 студентов учатся на оценки “хорошо” и “отлично”, в том числе 16 юношей. 28 студентов занимаются спортом, в том числе 18 юношей и 17 студентов, учащихся на оценки “хорошо” и “отлично”. 15 юношей учатся на “хорошо” и “отлично” и при этом занимаются спортом». В предоставленных данных была найдена ошибка. В чем она состоит?

Упражнения для повторения

195. Найдите координаты точки пересечения графиков функций $y = -0{,}1x + 0{,}5$ и $y = 0{,}3x + 0{,}1$.

196. Решите уравнение в целых числах:

а) $3x - 2y = 5$; б) $2x - 3y = 5$.

197. В классе трое учащихся хорошо знают физику, пятеро — английский язык и двое — биологию. Сколькими способами можно составить команду из трех человек для участия в интеллектуальном марафоне, если в команде должен быть один человек, хорошо знающий физику, один — английский язык и один — биологию?

9. Взаимно однозначное соответствие

Пусть требуется сравнить число элементов множеств X и Y, где X — множество двузначных чисел, Y — множество трехзначных чисел, оканчивающихся цифрой 9. С помощью непосредственного подсчета числа элементов можно установить, что $n(X) = n(Y)$. Однако к этому выводу можно прийти и не прибегая к подсчету.

Поставим в соответствие каждому двузначному числу такое трехзначное число, которое получается из него приписыванием справа цифры 9.

При этом каждое трехзначное число из множества Y окажется соответствующим для некоторого двузначного числа, а именно для того числа, которое получается из него зачеркиванием последней цифры. Соотношение между множествами X и Y показано с помощью схемы:

$$\begin{array}{cccccc}
10, & 11, & 12, & \ldots, & 98, & 99 \\
\updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \updownarrow \\
109, & 119, & 129, & \ldots, & 989, & 999.
\end{array}$$

Говорят, что между множествами X и Y установлено *взаимно однозначное соответствие*.

Вообще, *если каждому элементу множества A поставлен в соответствие единственный элемент множества B и при этом любой элемент множества B оказывается соответствующим некоторому единственному элементу множества A, то говорят, что между множествами A и B установлено взаимно однозначное соответствие*.

Установив в рассмотренном выше примере взаимно однозначное соответствие между множествами X и Y, мы тем самым показали, что $n(X) = n(Y)$.

Приведем теперь пример взаимно однозначного соответствия между бесконечными множествами.

Рассмотрим множество N натуральных чисел и множество P четных натуральных чисел. Натуральному числу n поставим в соответствие число $2n$. Тогда каждому элементу множества N будет соответствовать единственный элемент множества P. При этом каждый элемент множества P окажется соответствующим для единственного элемента из множества N, так как любое натуральное четное число можно представить в виде $2n$, где $n \in N$, и причем единственным способом. Соотношение между множествами N и P показано на схеме:

$$\begin{array}{ccccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & \ldots, & n, & \ldots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \\ 2, & 4, & 6, & 8, & \ldots, & 2n, & \ldots . \end{array}$$

Мы показали, что между множествами N и P можно установить взаимно однозначное соответствие. Этот пример может вызвать удивление, так как множество P является собственным подмножеством множества N. Однако из него ясно, что привычные для нас представления, касающиеся конечных множеств, нельзя переносить на бесконечные множества.

Рассмотрим теперь пример взаимно однозначного соответствия между нечисловыми множествами. Пусть даны две окружности с общим центром O (рис. 6). Произвольной точке K внутренней окружности поставим в соответствие точку K' внешней окружности, лежащую на луче OK. Очевидно, что для любой точки внутренней окружности найдется единственная соответствующая ей точка внешней окружности и, наоборот, любая точка внешней окружности является соответствующей для некоторой точки внутренней окружности. Таким образом, установлено взаимно однозначное соответствие между множеством точек внутренней окружности и множеством точек внешней окружности.

Установив взаимно однозначное соответствие между множествами точек окружностей, мы тем самым показали, что окружности содержат одинаковое число точек, хотя очевидно, что длина внутренней окружности меньше длины внешней. Этот удивительный факт еще раз

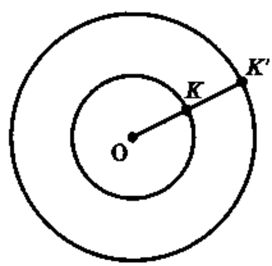


Рис. 6

убеждает нас в особенностях соотношений между бесконечными множествами.

198. Укажите способ, позволяющий установить взаимно однозначное соответствие между:

а) множеством натуральных чисел и множеством целых отрицательных чисел;

б) множеством всех натуральных чисел и множеством нечетных натуральных чисел.

199. Между какими множествами установлено взаимно однозначное соответствие, если каждой правильной дроби со знаменателем 11 поставлена в соответствие сумма ее числителя и знаменателя?

200. Между какими числами устанавливает взаимно однозначное соответствие таблица квадратов двузначных чисел? Для чисел 43, 57, 79 укажите соответствующие. Какому числу соответствует число 729; 3969; 9604?

201. Каждому целому числу поставлен в соответствие его модуль. Является ли взаимно однозначным соответствие между множеством целых чисел и множеством их модулей?

202. Укажите способ, позволяющий установить взаимно однозначное соответствие между:

а) множеством натуральных чисел и множеством их квадратов;

б) множеством всех натуральных чисел и множеством натуральных чисел, больших 5.

203. Укажите способ, позволяющий установить взаимно однозначное соответствие:

а) между множеством четных натуральных чисел и множеством нечетных натуральных чисел;

б) множеством квадратов натуральных чисел и множеством кубов натуральных чисел.

204. На рисунке 7,а показано, как можно установить взаимно однозначное соответствие между множествами точек отрезков AB и CD. Для точек K, L и M найдите соответствующие им точки. Отметьте точку, которой соответствует точка P'.

205. Укажите какой-либо способ, позволяющий установить взаимно однозначное соответствие между множеством точек полуокружности и множеством точек диаметра AB (рис. 7, б).

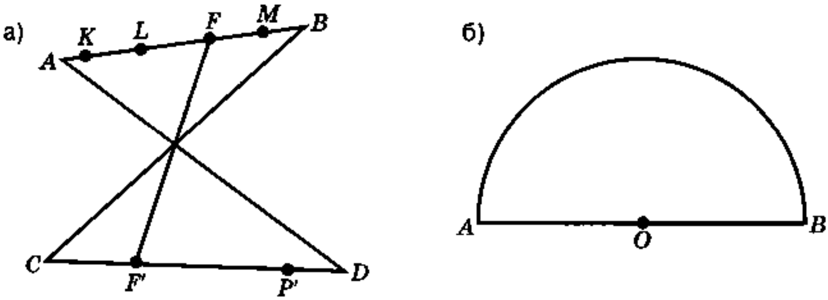


Рис. 7

Упражнения для повторения

206. Упростите выражение:

а) $\dfrac{2+\dfrac{x-2y}{y}}{x^2}$; б) $\dfrac{\dfrac{x^2+6y^2}{x^2}-1}{2y^2}$; в) $\dfrac{1-\dfrac{x^2+y^2}{xy}}{x^3+y^3}$.

207. Докажите, что при любом значении x принимает положительные значения квадратный трехчлен:

а) $x^2-18x+101$; б) $3x^2-12x+33$.

208. Найдите ординаты общих точек графиков функций:

а) $y=x^2$ и $y=(2-x)^2$; б) $y=(x+2)^2$ и $y=(2x-1)^2$.

10. Натуральные числа. Целые числа

Числа 1, 2, 3, 4, 5, ... , употребляемые при счете, называют, как известно, *натуральными числами*.

Каждое натуральное число получается из предыдущего прибавлением единицы, т. е. за каждым натуральным числом n следует число $n+1$. Каждое натуральное число, отличное от 1, следует за натуральным числом, которое получается из него вычитанием единицы, т. е. натуральное число n, где $n \neq 1$, следует за числом $n-1$. Исключение составляет число 1, которое не следует ни за каким натуральным числом.

Множество натуральных чисел обычно обозначают, как вы знаете, буквой N (от первой буквы латинского слова *naturalis* — естественный, природный). Множество N бесконечное, в нем есть наименьший элемент — число 1, но нет наибольшего элемента.

Сумма и произведение двух натуральных чисел всегда являются натуральными числами, т. е. на множестве натуральных чисел всегда выполнимы действия сложения и умножения, а именно:

$$\text{если } a \in N \text{ и } b \in N, \text{ то } a + b \in N \text{ и } ab \in N.$$

Иначе обстоит дело с вычитанием и делением. На множестве натуральных чисел эти действия в ряде случаев невыполнимы. Другими словами, уравнения $a + x = b$ и $ax = b$, где $a \in N$, $b \in N$, на множестве натуральных чисел не всегда имеют решения. Например, имея в запасе только натуральные числа, нельзя решить уравнения $8 + x = 3$, $5x = 16$.

Для того чтобы вычитание натуральных чисел было выполнимо во всех случаях, множество натуральных чисел дополняют числом 0 и числами, противоположными натуральным, которые обозначаются так: -1, -2, -3 и т. д. Натуральные числа, противоположные им числа и число 0 составляют *множество целых чисел*:

$$\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots .$$

Множество целых чисел, как известно, принято обозначать буквой Z (от первой буквы немецкого слова *Zahl* — число). Множество Z также является бесконечным, в нем нет ни наименьшего элемента, ни наибольшего. В множестве Z всегда выполнимы действия сложения, вычитания и умножения. В результате выполнения любого из этих действий над целыми числами получается целое число, т. е. если $a \in Z$ и $b \in Z$, то $a + b \in Z$, $a - b \in Z$ и $ab \in Z$.

Однако деление по-прежнему и на множестве Z выполнимо не во всех случаях, т. е. уравнение $ax = b$, где $a \in Z$ и $b \in Z$, не всегда разрешимо в целых числах. Так, например, на множестве целых чисел не имеет корней уравнение $3x = -11$.

Заметим, что если для любых двух элементов множества K определена некоторая операция (например, сложение) и результат выполнения этой операции также принадлежит множеству K, то говорят, что множество K *замкнуто* относительно этой операции. Так, например, множество N натуральных чисел замкнуто относительно таких операций, как сложение и умножение, а множество Z целых чисел замкнуто относительно трех операций — сложения, вычитания и умножения.

Множество N натуральных чисел является собственным подмножеством множества Z целых чисел. Покажем, что между множествами Z и N можно установить взаимно однозначное соответствие. Для этого будем выписывать целые числа, располагая их следующим образом: на первом месте запишем число 0, а далее будем брать в порядке возрастания натуральные числа и за каждым натуральным числом будем записывать противоположное ему целое число. Получим:

$$0,\ 1,\ -1,\ 2,\ -2,\ 3,\ -3,\ \dots\ n,\ -n,\ \dots,\ \text{где } n \in N.$$

Поставим числу 0 в соответствие число 1, числу 1 — число 2, числу -1 — число 3, числу 2 — число 4 и т. д. Вообще каждому натуральному числу n поставим в соответствие число $2n$, а противоположному ему целому отрицательному числу $-n$ поставим в соответствие число $2n + 1$. Тем самым каждому целому числу мы поставим в соответствие единственное натуральное число. При этом каждое натуральное число окажется соответствующим вполне определенному целому числу.

Установленное соответствие показано с помощью схемы:

$$\begin{array}{cccccccccc} 0, & 1, & -1, & 2, & -2, & 3, & -3, & \dots, & n, & -n, \dots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \updownarrow \\ 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & \dots, & 2n, & 2n+1, \dots, \end{array}$$

Таким образом, мы убедились, что между множеством Z целых чисел и множеством N натуральных чисел можно установить взаимно однозначное соответствие.

Если между множеством M и множеством натуральных чисел N можно установить взаимно однозначное соответствие, то множество M называют *счетным*. Таким образом, мы доказали, что множество целых чисел Z является счетным. В предыдущем пункте было показано, что счетным является множество P четных натуральных чисел.

209. Не вычисляя значения выражения, определите, является ли оно натуральным числом:

а) $(112{,}8 + 167{,}2) \cdot 17$;
б) $(1284 - 1113) : \frac{1}{13}$;
в) $175 \cdot (341{,}6 - 248{,}6)$;
г) $2{,}17 \cdot (3 \cdot 1{,}15 - 3{,}45)$.

210. Верно ли утверждение:

а) если $a \in N$, то $a \in Z$;
б) если $a \notin N$, то $a \notin Z$;
в) если $a \in Z$, то $a \in N$;
г) если $a \notin Z$, то $a \notin N$?

211. Задайте путем перечисления элементов множество A целых значений x, удовлетворяющих условию:

а) $-4 \leqslant x \leqslant 3{,}7$; в) $|x| \leqslant 5$;

б) $-0{,}8 < x < 0{,}6$; г) $|x + 1| < 4$.

212. На координатной прямой отмечены точки m и $m + 4$, где $m \in \boldsymbol{Z}$ (рис. 8). Отметьте на этой прямой точки с координатами $m - 1$, $m + 1$, $m + 3$, $m - 5$.

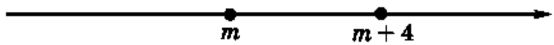


Рис. 8

213. При рассмотрении свойств множества $\boldsymbol{Z}$ целых чисел было показано, каким способом можно занумеровать все целые числа. Выясните:

а) под каким номером при этом будет записано число 11; −7;

б) какое число будет записано под номером 6; 10?

214. Какое из перечисленных множеств является счетным:

а) множество чисел, кратных трем;

б) множество зрителей финального матча по футболу;

в) множество квадратов натуральных чисел?

215. Является ли счетным:

а) множество нечетных натуральных чисел;

б) множество всех натуральных чисел, оканчивающихся нулем?

216. Является ли замкнутым относительно сложения множество:

а) четных чисел;

б) нечетных чисел;

в) степеней числа 2?

217. Является ли замкнутым относительно умножения множество:

а) четных чисел;

б) нечетных чисел;

в) степеней числа 2?

218. Является ли множество аликвотных дробей замкнутым относительно операции:

а) сложения;

б) умножения?

Замечание. Аликвотными называют дроби с числителем 1.

219. При каких целых значениях m значение выражения является целым числом:

а) $\frac{(m-3)^2}{m}$; б) $\frac{(4m+3)^2}{2m+3}$; в) $\frac{(5m+6)(m-1)}{5m+1}$?

220. При каких целых значениях m корень уравнения является целым числом:

а) $mx + 2 = 3x + 4$; б) $mx - 1 = 2(x + 6)$?

221. Верно ли утверждение, что каждое нечетное число может быть представлено в виде:

а) $2m - 3$, где $m \in Z$; б) $2m^2 - 3$, где $m \in Z$?

222. Верно ли утверждение, что каждое четное число может быть представлено в виде:

а) $4m + 2$, где $m \in Z$; б) $2 - 2m$, где $m \in Z$?

223. Докажите, что если при некоторых значениях x и y значение дроби $\frac{x}{y}$ является целым числом, то также является целым числом значение дроби:

а) $\frac{x+3y}{y}$; б) $\frac{3y-2x}{y}$; в) $\frac{2(x^2-3)-3(y^2-2)}{y^2}$.

224. При некоторых значениях a и b значение дроби $\frac{5a+3b}{a}$ является целым числом. Верно ли утверждение, что при тех же значениях a и b значение дроби $\frac{a-b}{a}$ также является целым числом?

225. Найдите все пары целых чисел, удовлетворяющие уравнению:

а) $xy = 17$; в) $(x + 1)(y - 2) = 17$;

б) $(x + 1)y = 17$; г) $xy - 2x + y = 19$.

226. Найдите все целочисленные решения уравнения:

а) $(x - y)(x + 2) = 5$; в) $(2x - y)(x + 2y) = -3$;

б) $xy - x + y^2 - y = 5$; г) $2x^2 + xy - y^2 = -3$.

Упражнения для повторения

227. Из 25 учащихся класса каждый изучает английский или немецкий язык. Известно, что 17 учащихся изучают английский, а 12 — немецкий язык. Сколько учащихся изучают оба языка?

228. Упростите выражение

$$\left(\frac{a-2x}{a^2+4x^2+2ax}-\frac{1}{a-2x}\right)\left(\frac{a^3}{x^2}-8x\right)$$

и найдите его значение, если $a = -\frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{3}$.

Контрольные вопросы и задания

1. Сформулируйте определения пересечения множеств и объединения множеств.

2. Какое соответствие между множествами является взаимно однозначным?

3. Объясните, каким образом можно установить взаимно однозначное соответствие между множеством целых чисел и множеством натуральных чисел.

§ 5. ДЕЛИМОСТЬ ЧИСЕЛ

11. Свойства делимости

В множестве целых чисел всегда выполнимы сложение, вычитание и умножение чисел, т. е. сумма, разность и произведение целых чисел всегда являются целыми числами. Иначе обстоит дело с делением. Лишь в отдельных случаях при делении одного целого числа на другое в частном получается целое число.

Напомним, что разделить число a на число b, где $b \neq 0$, — это значит найти такое число k, при умножении на которое числа b получается a, т. е. верно равенство $bk = a$. Ограничение, которое накладывается на b, объясняется тем, что при $a \neq 0$ равенство $0 \cdot k = a$ не является верным ни при каком k, а при $a = 0$ равенство $0 \cdot k = a$ верно при любом k, т. е. частное становится неопределенным. Это делает понятной часто употребляемую фразу: «На нуль делить нельзя».

Нас будет интересовать случай, когда a и b ($b \neq 0$) — целые числа и частное от деления a на b также является целым числом, т. е. когда существует целое число k такое, что $a = bk$. В таком случае говорят, что «a делится на b нацело» или, короче: «a делится на b».

Определение. **Целое число a делится на целое число b, не равное нулю, если существует такое целое число k, что $a = bk$.**

Например, 56 делится на -8, так как $56 = (-8) \cdot (-7)$, где -7 — целое число, а 78 не делится на -8, так как не существует такого целого числа k, для которого верно равенство $78 = (-8)k$.

Если a делится на b, то число b называют *делителем* числа a, а число a — *кратным* числа b. Говорят также, что «a кратно b». Например, делителями числа 4 являются числа $1, -1, 2, -2, 4, -4$. Кратными числа 4 являются числа $4, -4, 8, -8, 12, -12$ и т. д., вообще любое число вида $4m$, где $m \in Z$.

Рассмотрим некоторые свойства делимости (буквами обозначены целые числа).

1. ***Всякое число a, отличное от нуля, делится на себя.***

2. ***Нуль делится на любое число b, не равное нулю.***

3. ***Если a делится на b ($b \neq 0$) и b делится на c ($c \neq 0$), то a делится на c.***

4. ***Если a делится на b ($b \neq 0$) и b делится на a ($a \neq 0$), то числа a и b либо равны, либо являются противоположными числами.***

Справедливость первого свойства вытекает из того, что равенство $a \cdot 1 = a$ верно при любом a, а второго — из того, что равенство $b \cdot 0 = 0$ верно при любом $b \neq 0$.

Докажем справедливость третьего свойства. Из определения делимости следует, что $a = bk$, $b = cm$, где k и m — целые числа. Отсюда $a = (cm)k$, т. е. в силу сочетательного свойства умножения $a = c(mk)$, где mk — целое число, а это означает, что a делится на c.

Докажем теперь справедливость четвертого свойства. Из определения делимости следует, что $a = bk$ и $b = am$, где k и m — целые числа. Отсюда $a = (am)k$, т. е. $a = a\,(mk)$. Так как $a \neq 0$, то $mk = 1$. Однако $mk = 1$ для целых чисел m и k тогда и только тогда, когда оба числа m и k равны 1 или равны -1. В первом случае числа a и b равны, во втором — они отличаются только знаком.

Определение и свойства делимости находят применение при решении задач.

Приведем примеры.

Пример 1. Пусть a и b — целые числа, причем $b \neq 0$. Докажем, что если a делится на b, то a^n делится на b^n при любом натуральном n.

Из определения делимости следует, что существует такое целое число k, что $a = bk$. Возведя обе части этого равенства в степень n, получим, что $a^n = (bk)^n$, т. е. $a^n = b^n \cdot k^n$.

Так как k — целое число и $b \neq 0$, то k^n также является целым числом и $b^n \neq 0$. Следовательно, по определению a^n делится на b^n.

Пример 2. Выясним, каково соотношение между множеством A чисел, кратных 6, и множеством B чисел, кратных 18.

Пусть целое число a делится на 18. Из условия, что a делится на 18 и 18 делится на 6, следует, что a делится на 6. Значит, каждое число, кратное 18, является кратным 6, т. е. каждый элемент множества B является элементом множества A. При этом в множестве A есть элементы, не принадлежащие B, например число 12. Это означает, что множество B является собственным подмножеством множества A.

Соотношение между множествами A и B показано с помощью кругов Эйлера на рисунке 9.

229. Укажите, если возможно, два значения a, при которых верно высказывание:

а) a делится на 11; в) 0 делится на a;
б) 17 делится на a; г) a делится на 0.

230. Докажите, что если a кратно 6 и b кратно 5, то произведение ab кратно 30.

231. Верно ли высказывание:

а) если a делится на 15, то a делится на 5;
б) если a делится на 5, то a делится на 15;
в) если a делится на 30, то a делится на 90;
г) если a делится на 105, то a делится на 35?

232. Покажите с помощью кругов Эйлера соотношение между множествами A и B, если:

а) A — множество чисел, кратных 4, B — множество чисел, кратных 12;
б) A — множество чисел, кратных 96, B — множество чисел, кратных 16;

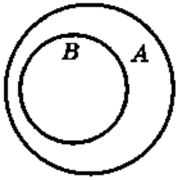


Рис. 9

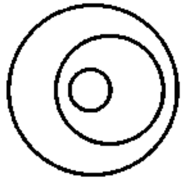


Рис. 10

в) A — множество чисел, кратных 37, B — множество чисел, кратных 111.

233. Пусть F — множество чисел, кратных 36. Принадлежит ли множеству F число a, если известно, что:

а) a кратно 9; б) a кратно 72; в) a кратно 108?

234. На схеме Эйлера (рис. 10) меньший из кругов изображает множество чисел, кратных 12. Приведите пример бесконечных множеств, которые могут изображать два других круга.

235. На схеме Эйлера (см. рис. 10) средний круг изображает множество чисел, кратных 4. Приведите пример бесконечных множеств, которые могут изображать два других круга.

236. Пусть P — множество чисел, кратных 5, K — множество чисел, кратных 15, F — множество чисел, кратных 60. Укажите:

а) два числа, принадлежащих всем трем множествам;

б) два числа, которые принадлежат множеству P, но не принадлежат множествам K и F;

в) два числа, которые принадлежат множествам P и K, но не принадлежат множеству F.

Покажите соотношение между множествами P, K и F с помощью кругов Эйлера.

Упражнения для повторения

237. Упростите выражение

$$\frac{\frac{1}{a-b}-\frac{1}{a+b}}{\frac{1}{a-b}+\frac{1}{a+b}}-\frac{a+b}{a}.$$

238. Найдите значение выражения, зная, что $n \in N$:

а) $\dfrac{8^{n+1}\cdot 5^{n-1}-8^{n-1}\cdot 5^{n+1}}{40^n}$; б) $\dfrac{6^{2n+3}}{2^{2n+2}\cdot 3^{2n+3}-2^{2n+1}\cdot 3^{2n+1}}$.

239. Изобразите схематически график функции:

$$y = \begin{cases} x^2, \text{если } |x| \leqslant 1, \\ 1, \text{если } |x| > 1. \end{cases}$$

12. Делимость суммы и произведения

Докажем некоторые свойства делимости суммы и произведения. При доказательстве воспользуемся тем, что сумма и произведение целых чисел есть целое число.

1. ***Если в сумме целых чисел каждое слагаемое делится на некоторое число, то сумма делится на это число.***

Доказательство проведем для трех слагаемых.

Пусть каждое из целых чисел a, b и c делится на p ($p \in Z$, $p \neq 0$). По определению $a = pk$, $b = pl$, $c = pm$, где k, l и m — целые числа.

Тогда

$$a + b + c = pk + pl + pm = p(k + l + m).$$

Так как k, l и m — целые числа, то $k + l + m$ — целое число, а значит, по определению $a + b + c$ делится на p.

С помощью тех же рассуждений и преобразований можно доказать справедливость данного свойства для любого числа слагаемых.

Заметим, что обратное утверждение не верно. Из того, что сумма $a + b + c$ делится на p, не следует, что каждое слагаемое делится на p. Примером может служить сумма $4 + 10 + 16$, которая делится на 3, тогда как каждое слагаемое не делится на 3.

2. ***Если в разности целых чисел уменьшаемое и вычитаемое делятся на некоторое число, то разность делится на это число.***

Пусть a и b — целые числа, a делится на p и b делится на p ($p \in Z$, $p \neq 0$). Если b делится на p, то $-b$ также делится на p. Представив разность $a - b$ в виде $a + (-b)$, получаем сумму, которая в силу предыдущего свойства делится на p, так как в ней делится на p каждое слагаемое.

3. ***Если в сумме целых чисел все слагаемые, кроме одного, делятся на некоторое число, то сумма не делится на это число.***

Пусть a, b и c — целые числа, a делится на p ($p \in Z$, $p \neq 0$), b делится на p, а c не делится на p. Докажем, что сумма $a + b + c$ не делится на p.

Доказательство проведем методом от противного. Предположим, что сумма $a + b + c$ делится на p. Тогда в разности $(a + b + c) - (a + b)$ уменьшаемое и вычитаемое делятся на p, а значит, разность делится на p. Так как разность $(a + b + c) - (a + b)$ равна c, то получается, что c делится на p, а это противоречит условию. Следовательно, наше предположение неверно и сумма $a + b + c$ не делится на p, что и требовалось доказать.

4. ***Если в произведении целых чисел один из множителей делится на некоторое число, то и произведение делится на это число.***

Пусть в произведении целых чисел a и b множитель a делится на c ($c \in Z$, $c \neq 0$). По определению $a = ck$, где k — целое число. Тогда $ab = (ck)b$ и в силу сочетательного свойства умножения $ab = c(kb)$, причем kb — целое число. Значит, по определению ab делится на c.

5. ***Если в произведении двух целых чисел один из множителей делится на m, а другой на n, то произведение делится на mn.***

Пусть a и b — целые числа, a делится на m ($m \in Z$, $m \neq 0$), а b делится на n ($n \in Z$, $n \neq 0$). Тогда по определению $a = mk$, $b = nl$, где k и l — целые числа. Отсюда, применяя переместительное и сочетательное свойства умножения, получаем, что

$$ab = (mk)(nl) = (mn)kl.$$

Так как k и l — целые числа, то их произведение также является целым числом. Значит, ab делится на mn.

При решении задач на делимость часто используются свойства, которые следуют из доказанных свойств и связаны с последовательным расположением целых чисел:

произведение n последовательных целых чисел делится на n;

произведение трех последовательных целых чисел делится на 6;

произведение двух последовательных четных чисел делится на 8.

Рассмотрим примеры.

П р и м е р 1. Докажем, что сумма $2^8 + 4^5 + 8^2$ делится на 28.

Представим каждое слагаемое в виде степени 2 и вынесем общий множитель за скобки:

$$2^8 + 4^5 + 8^2 = 2^8 + (2^2)^5 + (2^3)^2 = 2^8 + 2^{10} + 2^6 =$$
$$= 2^6(2^2 + 2^4 + 1) = 2^6 \cdot 21.$$

Так как в произведении $2^6 \cdot 21$ первый множитель делится на 4, а второй на 7, то это произведение (а значит, и данное выражение) делится на 28.

Пример 2. Докажем, что целое число a, не равное нулю и не являющееся делителем 40, не может быть корнем уравнения

$$3x^5 - 9x^3 - 36x + 40 = 0.$$

Допустим, что a — корень уравнения. Тогда верно равенство

$$3a^5 - 9a^3 - 36a + 40 = 0.$$

В левой части этого равенства записана сумма, которая не делится на a, так как в ней все слагаемые, кроме последнего, делятся на a. В правой части записано число 0, которое делится на любое отличное от нуля число и, значит, делится на a. Полученное противоречие показывает, что предположение неверно и число a не является корнем уравнения.

Пример 3. Докажем, что разность квадратов двух нечетных чисел делится на 8.

Пусть даны числа $2m + 1$ и $2p + 1$, где $m \in \boldsymbol{Z}$, $p \in \boldsymbol{Z}$. Докажем, что при любых целых m и p значение выражения $(2m + 1)^2 - (2p + 1)^2$ делится на 8.

Разложим данное выражение на множители:

$$(2m + 1)^2 - (2p + 1)^2 = (2m + 1 + 2p + 1)(2m + 1 - 2p - 1) =$$
$$= 2(m + p + 1) \cdot 2(m - p) = 4(m + p + 1)(m - p).$$

Если числа m и p одинаковой четности (оба четные или оба нечетные), то множитель $m - p$ делится на 2, а если числа m и p разной четности, то множитель $m + p + 1$ делится на 2. Таким образом, при любых значениях m и p в произведении $4(m + p + 1)(m - p)$ первый множитель делится на 4, а второй или третий делится на 2. Значит, произведение делится на 8.

Пример 4. Докажем, что если разность $a - b$, где $a \in \boldsymbol{Z}$, $b \in \boldsymbol{Z}$, делится на 3, то $a^3 - b^3$ делится на 9.

Разложим разность кубов на множители:

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2).$$

Представим трехчлен $a^2 + ab + b^2$ в виде суммы, в которой первое слагаемое является квадратом двучлена $a - b$:

$$a^2 + ab + b^2 = a^2 + ab + b^2 - 2ab + 2ab = (a - b)^2 + 3ab.$$

Так как $a - b$ делится на 3, то $(a - b)^2$ также делится на 3, а значит, сумма $(a - b)^2 + 3ab$ делится на 3.

Итак, в произведении $(a - b)(a^2 + ab + b^2)$ каждый из множителей делится на 3. Значит, это произведение делится на 9.

240. Докажите, что значение выражения:

а) $6^5 + 36^2 - 216$ делится на 41;

б) $9^5 + 27^3 + 81^2$ делится на 13;

в) $2^8 + 4^5 - 8^2$ делится на 38;

г) $3^{11} + 9^6 + 27^3$ делится на 111.

241. Докажите, что a делится на b, если:

а) $a = 4^{10} + 4^9 + 4^8$, $b = 2^6 - 2^5 - 2^3$;

б) $a = 9^7 + 9^6 + 9^5$, $b = 3^{10} - 3^9 + 3^8$.

242. Укажите, если возможно, три значения переменной a, при которых сумма $35 + 3a$:

а) кратна 5; б) кратна 7; в) кратна 3.

243. Определите, делится ли значение данного выражения на 6 при любом значении c ($c \in \mathbf{Z}$), при некоторых значениях c или не делится на 6 ни при каком значении c:

а) $(3c + 2)(2c + 1) - (6c + 1)(c - 2)$;

б) $(12c - 1)(c + 3) - (6c + 3)(2c - 1)$;

в) $(5c - 1)(6c + 4) + (15c - 2)(2c + 2)$;

г) $(c + 6)(6c - 1) + (3c + 2)(2c - 5)$.

244. Определите, какие из дробей

$$\frac{a}{a+1},\quad \frac{a}{a+5},\quad \frac{2a}{2a+1},\quad \frac{a+6}{11},\quad \frac{2a}{a+4},\quad \frac{5a}{15a+10}$$

при допустимых значениях a, где $a \in \mathbf{Z}$:

а) несократимы при любом a;

б) сократимы при любом a;

в) сократимы при некоторых a.

245. Имеет ли целые корни уравнение:

а) $17x^6 - 51x^4 + 34x^2 - 87 = 0$;

б) $26x^4 + 13x^2 - 65x - 7 = 0$?

246. Докажите, что на прямой $32x + 48y = 105$ нет ни одной точки с целочисленными координатами.

247. Принадлежат ли графику уравнения $13x + 65y = 106$ точки с целочисленными координатами?

248. Докажите, что если a и b — трехзначные числа, сумма которых делится на 37, то, приписав к числу a число b, мы получим шестизначное число, которое делится на 37.

249. Докажите, что четырехзначное число вида $\overline{abba}$ делится на 11.

250. Докажите, что сумма $2002^{100} + 3003^{100}$ делится на 7, на 11, на 13.

251. Докажите, что

а) сумма $1^3 + 2^3 + \ldots + 98^3 + 99^3$ делится на 100;

б) сумма $1^3 + 2^3 + \ldots + 48^3 + 49^3$ делится на 25.

252. Докажите, что если каждое из двух четных чисел кратно 3, то сумма их кубов делится на 54.

253. Докажите, что

а) $2^9 + 1$ делится на 9; б) $3^9 - 1$ делится на 13.

254. Докажите, что сумма кубов трех последовательных целых чисел делится на 3.

255. Докажите, что если число $a + 7b$ делится на 17 ($a \in Z$, $b \in Z$), то число $10a + 2b$ делится на 34.

256. Докажите, что при любом целом m значение выражения кратно 6:

а) $m^3 + 17m$; б) $m^3 - 43m$; в) $m^3 - 3m^2 + 2m$.

257. Докажите, что при любом $a \in Z$ значение выражения делится на 3:

а) $a^3 + 26a + 15$; б) $a^3 + 20a + 27$.

258. Докажите, что если сумма $ab + cd$ делится на $a - c$, то сумма $ad + bc$ также делится на $a - c$.

Упражнения для повторения

259. Найдите пересечение и объединение множеств натуральных делителей чисел 15 и 18. Чему равен наибольший общий делитель этих чисел?

260. Найдите все точки с целочисленными координатами, принадлежащие графику функции:

а) $a(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x - 1}$; в) $\gamma(x) = \dfrac{2x^2 + 3x + 3}{x + 1}$;

б) $h(x) = \dfrac{x^2 - 3x - 1}{x - 2}$; г) $\varphi(x) = \dfrac{x^2 - x - 1}{x - 1}$.

261. Сравните среднее арифметическое и медиану ряда данных:

а) 4; 5; 5; 6; 6; 6; 7; б) 4; 4; 5; 5; 5; 6; 6; 7.

13. Деление с остатком

В младших классах вы встречались со случаями, когда при делении одного натурального числа на другое получается остаток. Например, если 73 разделить на 5, то в частном получится 14 и в остатке 3. Это записывают так: 73 : 5 = 14 (ост. 3). Остаток меньше 5. Если из 73 вычесть 3, то получится число 70, которое делится на 5, т. е. запись 73 : 5 = 14 (ост. 3) можно заменить другой: $73 - 3 = 5 \cdot 14$, причем $3 < 5$.

Заметим, что если деление натурального числа a на натуральное число b выполняется нацело, то считают, что остаток равен 0. В этом случае разность между числом a и остатком также делится на b.

Вообще число r является остатком от деления натурального числа a на натуральное число b, если разность $a - r$ делится на b и $0 \leqslant r < b$.

В курсе алгебры понятие деления с остатком распространяется на случай, когда делимое является целым числом, а делитель — натуральным. Определение остатка, принятое для натуральных чисел, переносится на этот случай.

Определение. **Целое число r называется остатком от деления целого числа a на натуральное число b, если разность $a - r$ делится на b и $0 \leqslant r < b$.**

Например, остаток от деления числа −11 на 3 равен 1, так как разность $-11 - 1$ делится на 3 и $0 \leqslant 1 < 3$.

Обозначим частное от деления $a - r$ на b буквой q. Тогда

$$a - r = bq,\ a = bq + r, \text{ где } 0 \leqslant r < b.$$

Число q называется частным (при $r = 0$) или неполным частным (при $0 < r < b$).

Так, $-11 = 3 \cdot (-4) + 1$. Число −4 — неполное частное.

При решении задач широкое применение находит теорема о делении с остатком.

Теорема. ***Для любого целого числа a и натурального числа b существует единственная пара целых чисел q и r, таких, что $a = bq + r$, где $0 \leqslant r < b$.***

Доказательство.

Рассмотрим множество чисел, кратных b, взятых в порядке возрастания:

$$\dots,\ -4b,\ -3b,\ -2b,\ -b,\ 0,\ b,\ 2b,\ 3b,\ 4b,\ \dots .$$

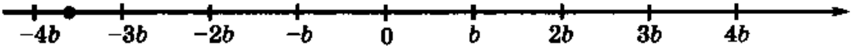


Рис. 11

Отметим соответствующие им точки на координатной прямой (рис. 11).

Передвигаясь по координатной прямой слева направо, будем сравнивать число a с числами, кратными b. Пусть $b(q + 1)$ — первое из этих чисел, которое больше a. Тогда число a либо совпадает с bq, либо заключено между числами bq и $b(q + 1)$, т. е.

$$bq \leqslant a < b(q + 1).$$

Геометрически это означает, что число a изображается точкой, которая либо совпадает с левым концом отрезка, ограниченного точками, изображающими числа bq и $b(q + 1)$, либо находится внутри него. В первом случае разность чисел a и bq равна 0, во втором она больше 0, но меньше b. Обозначив эту разность буквой r, получим, что

$$a - bq = r, \text{ где } 0 \leqslant r < b, \text{ т. е.}$$
$$a = bq + r, \text{ где } 0 \leqslant r < b.$$

Так как отрезок, которому принадлежит точка a, определяется единственным образом, то число q — единственное, а значит, единственным является число r, равное $a - bq$.

Теорема доказана.

Пример 1. Найдем неполное частное и остаток от деления числа -34 на 9.

Представим число -34 в виде суммы $-36 + 2$, где -36 — наибольшее из отрицательных чисел, кратных 9 и не превосходящих -34. Тогда $-34 = -36 + 2 = 9 \cdot (-4) + 2$. Неполное частное равно -4, а остаток равен 2.

На делении с остатком основаны различные формы представления целых чисел. Например, при делении целого числа на 3 могут получиться остатки 0, 1 и 2. Поэтому любое целое число может быть представлено в одном из следующих видов:

$$3k,\ 3k + 1,\ 3k + 2 \ (k \text{ — целое число}).$$

Аналогично, исходя из остатков, которые могут получиться при делении целого числа на 5, всякое целое число может быть представлено в одном из следующих видов:

$$5k,\ 5k + 1,\ 5k + 2,\ 5k + 3,\ 5k + 4 \ (k \text{ — целое число}).$$

В первом случае множество целых чисел разбивается на три непересекающиеся подмножества, или, как говорят иначе, на три *класса*, во втором случае оно разбивается на пять классов.

Пример 2. Найдем, какие остатки могут получиться при делении квадрата целого числа на 4.

В соответствии с остатками, которые могут получиться при делении целого числа на 4, любое целое число можно представить в одном из видов:

$$4k,\ 4k + 1,\ 4k + 2,\ 4k + 3\ (k \text{ — целое число}).$$

Отсюда получаем:

$$(4k)^2 = 16k^2 = 4(4k^2),$$
$$(4k + 1)^2 = 16k^2 + 8k + 1 = 4k(4k + 2) + 1,$$
$$(4k + 2)^2 = 16k^2 + 16k + 4 = 4(4k^2 + 4k + 1),$$
$$(4k + 3)^2 = 16k^2 + 24k + 9 = 4(4k^2 + 6k + 2) + 1.$$

Мы видим, что квадрат целого числа либо делится на 4, т. е. дает остаток 0, либо при делении на 4 дает остаток 1. Значит, при делении квадрата целого числа на 4 не может получиться остаток 2 или 3.

Заметим, что при решении задач, связанных с разбиением множества целых чисел на классы в зависимости от остатков от деления на натуральное число n, часто используется утверждение, которое впервые ясно сформулировал и успешно применял в доказательствах известный немецкий математик Петер Густав Дирихле.

Принцип Дирихле. ***Если m и n — натуральные числа и $m > n$, то при разбиении множества, состоящего из m элементов, на n классов хотя бы в один из классов попадет более одного элемента.***

Дирихле Петер Густав Лежен (1805—1859) — немецкий математик; сделал ряд крупных открытий в теории чисел, в области математического анализа, в механике и математической физике, в частности в теории потенциала.

Очевидность этого утверждения делает понятной его шуточная формулировка:

если m зайцев сидят в n клетках и $m > n$, то хотя бы в одной клетке сидит более одного зайца.

Пример 3. Докажем, что среди 13 разных целых чисел всегда найдутся два числа, разность которых делится на 12.

Действительно, в зависимости от остатков, которые получаются при делении целого числа на 12, множество целых чисел разбивается на 12 классов. Допустим, что 12 из данных чисел попадут в разные классы. Однако тринадцатое число в соответствии с принципом Дирихле попадет в один класс с каким-либо из этих чисел. Таким образом, среди данных чисел всегда найдутся два числа, которые при делении на 12 дают одинаковые остатки, а это означает, что их разность делится на 12. В самом деле, если a и b — целые числа, $a = 12q_1 + r$ и $b = 12q_2 + r$, где $0 \leqslant r < 12$, то $a - b = (12q_1 + r) - (12q_2 + r) = 12(q_1 - q_2)$, т. е. $a - b$ делится на 12.

Рассмотрим свойство деления с остатком, относящееся к делению натурального числа на натуральное:

если при делении натурального числа a на натуральное число b получается остаток r, то наибольший общий делитель чисел a и b равен наибольшему общему делителю чисел b и r.

В самом деле, если $a = bq + r$, где $0 \leqslant r < b$, то $r = a - bq$. По свойству делимости разности каждый общий делитель чисел a и b является делителем числа r. Значит, множество общих делителей чисел a и b совпадает с множеством общих делителей чисел b и r и поэтому эти пары чисел имеют один и тот же наибольший общий делитель. Таким образом, если $a = bq + r$, то НОД $(a; b)$ = НОД $(b; r)$.

На этом выводе основан способ нахождения наибольшего общего делителя двух натуральных чисел. Разъясним сущность этого способа на примере.

Пример 4. Найдем наибольший общий делитель чисел 527 и 1984.

Разделим большее число на меньшее, а затем будем последовательно делить делитель на получившийся остаток, пока деление не будет выполнено нацело:

$$\begin{array}{r|l} 1984 & \underline{527} \\ \underline{1581} & 3 \\ 403 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 527 & \underline{403} \\ \underline{403} & 1 \\ 124 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 403 & \underline{124} \\ \underline{372} & 3 \\ 31 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 124 & \underline{31} \\ \underline{124} & 4 \\ 0 & \end{array}$$

По доказанному свойству

$$\text{НОД}\ (1984,\ 527) = \text{НОД}\ (527,\ 403) =$$
$$= \text{НОД}\ (403,\ 124) = \text{НОД}\ (124,\ 31) = 31.$$

Рассмотренный способ нахождения наибольшего общего делителя двух натуральных чисел описан греческим математиком Евклидом (III в. до н. э.) в его знаменитом трактате «Начала» и получил название *алгоритм Евклида*.

Можно доказать, что между наибольшим общим делителем двух чисел a и b, наименьшим общим кратным этих чисел и произведением чисел a и b существует соотношение:

$$\text{НОД}\ (a;\ b) \cdot \text{НОК}\ (a;\ b) = ab.$$

С помощью этого соотношения и алгоритма Евклида можно существенно упростить вычисления НОК $(a;\ b)$.

262. Найдите неполное частное и остаток от деления:

а) 38 на 13; в) 5 на 6; д) −1 на 3; ж) −26 на 8;
б) 10 на 5; г) 117 на 24; е) −3 на 4; з) −75 на 16.

263. При делении целого числа a на 85 в остатке получили 34. Делится ли число a на 17; на 5?

264. Выписали подряд первые сто натуральных чисел. Сколько среди них таких, которые:

а) делятся на 6;
б) при делении на 6 дают остаток 1;
в) при делении на 6 дают остаток 3?

265. Найдите наибольшее число воскресений в году.

266. Докажите, что если целые числа a и b при делении на натуральное число p дают равные остатки, то разность $a - b$ делится на p, а если дают различные остатки, то разность $a - b$ не делится на p.

267. Из данных пар чисел выберите те, которые при делении на 5 дают равные остатки:

а) 176 и 131; б) 78 и 33; в) 72 и −23; г) −61 и −87.

268. Найдите все натуральные числа, которые при делении на 17 дают остаток, равный квадрату частного.

269. При делении на 7 одно целое число дает остаток 2, а другое 5. Какой остаток получится при делении на 7 произведения этих чисел?

270. Какие остатки могут получиться при делении квадрата целого числа: а) на 3; б) на 5?

271. Докажите, что при делении на 6 квадрата целого числа не может получиться в остатке 2 или 5.

272. Сколько различных остатков получится при делении куба целого числа на 13?

273. Число a при делении на 7 дает остаток 2. Какой остаток получится при делении на 7 числа:

а) $8a + 1$; б) $a^2 + a + 1$?

274. Некоторое число m ($m \in \mathbb{Z}$) дает при делении на 8 остаток 3. Какой остаток получится при делении на 8 числа $m^2 + 3m + 2$?

275. Докажите, что:

а) если целое число m при делении на 6 дает остаток 1, то число $m^2 - 2m + 19$ делится на 18;

б) если целое число m при делении на 8 дает остаток 2, то число $m^2 + 4m - 12$ делится на 64.

276. Существует ли такое целое число, которое при делении на 12 дает остаток 11, а при делении на 18 — остаток 1?

277. Число при делении на 5 дает остаток 1, а при делении на 3 — остаток 2. Найдите остаток от деления этого числа на 15.

278. Число при делении на 5 дает остаток 2, а при делении на 3 — остаток 1. Какой остаток получится от деления этого числа на 15?

279. Докажите, что если целые числа a и b дают при делении на 3 одинаковые остатки, не равные нулю, то число $ab - 1$ делится на 3.

280. Докажите, что среди 16 различных натуральных чисел найдутся хотя бы два числа a и b таких, что число $a - b$ делится на 15.

281. Докажите, что среди 25 различных натуральных чисел найдутся хотя бы два числа a и b таких, что число $a^2 - b^2$ делится на 24.

282. В классе 37 учащихся. Найдется ли такой месяц в году, в который свой день рождения отмечают не менее четырех учащихся этого класса?

283. Докажите, что:

а) если целое число a не делится на 5, то $a^4 - 1$ делится на 5;

б) если целое число a не делится на 7, то $a^6 - 1$ делится на 7.

284. Докажите, что если число не делится на 7, то его куб, увеличенный на 1 или уменьшенный на 1, делится на 7.

285. Докажите, что при любых целых a и b значение дроби $\frac{ab(a^2-b^2)}{6}$ является целым числом.

286. Докажите, что при любых целых a и b произведение $ab(a^2 - b^2)(4a^2 - b^2)$ делится на 30.

287. Используя алгоритм Евклида, найдите наибольший общий делитель чисел:

а) 437 и 133; в) 1848 и 375;
б) 735 и 1050; г) 805 и 1265.

288. Найдите наибольший общий делитель числителя и знаменателя дроби и сократите эту дробь:

а) $\frac{114}{133}$; б) $\frac{253}{713}$; в) $\frac{357}{1020}$; г) $\frac{205}{287}$.

289. Используя алгоритм Евклида, найдите наименьшее общее кратное чисел:

а) 884 и 689; б) 2442 и 2838.

Упражнения для повторения

290. Упростите выражение:

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{a}{3}\right)^2 : \left(\frac{2a - 3}{4a^2 + 9 - 6a} - \frac{12a - 18}{8a^3 + 27}\right).$$

291. Найдите, при каких значениях коэффициента k прямая, заданная уравнением $y = kx + 3$, не проходит через точку:

а) $A(4; -1)$; б) $B(-4; 1)$; в) $C(0; 3)$.

292. Найдите область допустимых значений переменной в выражении:

а) $\frac{x}{x-1}$; б) $\frac{x}{x^2-1}$; в) $\frac{x}{x^2+1}$; г) $\frac{x}{x^2+x}$.

14. Признаки делимости

При решении многих задач, например при разложении чисел на простые множители, сокращении дробей, вынесении общего множителя за скобки, упрощении уравнений и т. п., полезно знать некоторые *признаки делимости*, позволяющие, не выполняя деления, определять, делится ли одно число на другое или нет. Так как деление целых чисел сводится к делению их модулей, то признаки делимости формулируются для натуральных чисел.

Докажем некоторые уже известные вам признаки и выведем новые. При доказательстве будем использовать особенности записи чисел в десятичной системе счисления и свойства делимости.

Начнем с признаков делимости на 2 и на 5.

Всякое натуральное число можно представить в виде $10a + b$, где a — число десятков, b — число, выраженное последней цифрой. Слагаемое $10a$ при любом a делится на 2. Значит, делимость суммы $10a + b$ зависит от делимости второго слагаемого. Если b делится на 2, т. е. цифра b — четная, то сумма $10a + b$ делится на 2, а если b не делится на 2, т. е. цифра b — нечетная, то сумма $10a + b$ не делится на 2. Таким образом, мы доказали признак делимости на 2:

число делится на* 2 *тогда и только тогда, когда оно оканчивается четной цифрой.

Так как в рассмотренной сумме $10a + b$ слагаемое $10a$ делится на 5, то с помощью тех же рассуждений можно доказать признак делимости на 5:

***число делится на* 5 *тогда и только тогда, когда оно оканчивается цифрой* 0 *или* 5.**

Выведем теперь признаки делимости на 4 и на 25.

Всякое натуральное число можно записать в виде $100a + (10b + c)$, где a — число сотен, $10b + c$ — число, выраженное двумя последними цифрами. В сумме $100a + (10b + c)$ слагаемое $100a$ делится на 4. Значит, делимость суммы зависит от делимости второго слагаемого $10b + c$. Если $10b + c$ делится на 4, то сумма делится на 4, а если $10b + c$ не делится на 4, то сумма не делится на 4. Значит, доказан признак делимости на 4:

***число делится на* 4 *тогда и только тогда, когда число, выраженное его двумя последними цифрами, делится на* 4.**

Учитывая, что в рассмотренной сумме $100a + (10b + c)$ слагаемое $100a$ делится на 25, можно с помощью тех же рассуждений доказать признак делимости на 25:

***число делится на* 25 *тогда и только тогда, когда число, выраженное его двумя последними цифрами, делится на* 25.**

Докажем теперь признаки делимости на 9 и на 3. Доказательство проведем на примере шестизначного числа.

Пусть дано число $\overline{abcdef}$, где $a \neq 0$. Представим его в виде суммы разрядных слагаемых и преобразуем эту сумму, выделив в ней слагаемое, делящееся на 9. Получим:

$$a \cdot 10^5 + b \cdot 10^4 + c \cdot 10^3 + d \cdot 10^2 + e \cdot 10 + f =$$
$$= (99\,999a + a) + (9999b + b) + (999c + c) + (99d + d) +$$
$$+ (9e + e) + f = (99\,999a + 9999b + 999c + 99d + 9e) +$$
$$+ (a + b + c + d + e + f).$$

В полученной сумме первое слагаемое делится на 9 (на 3). Значит, если второе слагаемое делится на 9 (на 3), то сумма делится на 9 (на 3), а если второе слагаемое не делится на 9 (на 3), то и сумма не делится на 9 (на 3). Однако второе слагаемое представляет собой, как говорят, сумму цифр данного числа.

Рассуждения, проведенные для шестизначного числа, справедливы для любого многозначного числа. Таким образом, мы вывели признаки делимости на 9 и на 3:

число делится на 9 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 9;

число делится на 3 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 3.

Выведем теперь признак делимости на 11. Для этого воспользуемся тем, что всякое число вида $10^{2n} - 1$ или $10^{2n+1} + 1$, где $n \in N$, делится на 11. Действительно, число вида $10^{2n} - 1$ делится на 11, так как оно записывается с помощью четного числа девяток, например $10^2 - 1 = 99$, $10^4 - 1 = 9999$, а число $10^{2n+1} + 1$ делится на 11, так как сумму $10^{2n+1} + 1$ можно представить в виде произведения, в котором первый множитель равен $10 + 1$, т. е. равен 11.

Как и при доказательстве признака делимости на 9, рассуждения проведем на примере шестизначного числа.

Пусть дано число $\overline{abcdef}$, где $a \neq 0$.

Представим это число в виде суммы разрядных слагаемых и выделим в ней слагаемое, делящееся на 11:

$$a \cdot 10^5 + b \cdot 10^4 + c \cdot 10^3 + d \cdot 10^2 + e \cdot 10 + f =$$
$$= a\,(10^5 + 1) + b(10^4 - 1) + c(10^3 + 1) + d(10^2 - 1) + e(10 + 1) +$$
$$+ f - a + b - c + d - e =$$
$$= [a\,(10^5 + 1) + b(10^4 - 1) + c(10^3 + 1) + d(10^2 - 1) + e(10 + 1)] +$$
$$+ [(b + d + f) - (a + c + e)].$$

Первое слагаемое, заключенное в квадратные скобки, делится на 11. Значит, сумма делится на 11 тогда и только тогда, когда на 11 делится второе слагаемое, заключенное в квадратные скобки и представляющее собой разность между суммой цифр, стоящих на четных местах, и суммой цифр, стоящих на нечетных местах.

Проведенные рассуждения справедливы для любого многозначного числа.

Отсюда получается признак делимости на 11:

число делится на 11 тогда и только тогда, когда разность между суммой цифр, стоящих на четных местах, и суммой цифр, стоящих на нечетных местах, делится на 11.

В практике вычислений часто используется свойство, связанное с делением натурального числа на взаимно простые числа, т. е. такие натуральные числа, наибольший общий делитель которых равен 1:

если натуральное число делится на каждое из двух взаимно простых чисел, то оно делится на их произведение.

Докажем это. Начнем с более общего случая. Пусть число m делится на a и на b, где a, b, m — натуральные числа. Докажем, что m делится на число p ($p \in N$), которое является наименьшим общим кратным чисел a и b. Доказательство проведем методом от противного. Допустим, что m не делится на p. Тогда $m = pq + r$, где $0 < r < p$. Отсюда $r = m - pq$. Так как число m делится на a (по условию) и p делится на a (по определению наименьшего общего кратного), то по свойству делимости разности r делится на a. Аналогично можно доказать, что r делится на b. Значит, число r является общим кратным чисел a и b. При этом $0 < r < p$, т. е. меньше наименьшего общего кратного. Полученное противоречие показывает, что наше предположение неверно и, следовательно, число m делится на p.

Таким образом, мы показали, что если число m делится на каждое из чисел a и b, то оно делится на их наименьшее общее кратное. В случае когда a и b — взаимно простые числа, наименьшее общее кратное этих чисел равно их произведению. Значит, если m делится на a и делится на b, а числа a и b — взаимно простые, то m делится на их произведение, т. е. на ab. Что и требовалось доказать.

Например, число 792 делится на каждое из чисел 22 и 3, а так как эти числа взаимно простые, то оно делится на их произведение, т. е. на 66.

П р и м е р. Докажем, что при любом натуральном n значение дроби $\frac{10^n+5}{15}$ является натуральным числом.

Число $10^n + 5$ делится на 3, так как сумма его цифр равна 6 и 6 делится на 3. Это число делится также на 5, так как оканчивается цифрой 5. Так как числа 3 и 5 взаимно простые, то отсюда следует, что число $10^n + 5$ при любом $n \in N$ делится на их произведение, т. е. на 15. Значит, при любом $n \in N$ значение дроби $\frac{10^n+5}{15}$ является натуральным числом.

293. Делятся ли числа 134 664, 81 162, $\underbrace{22...2}_{12\text{ раз}}$; $\underbrace{66...6}_{18\text{ раз}}$:

а) на 2; б) на 3; в) на 4; г) на 9; д) на 11?

294. Из данных чисел

256 284, 119 637, 8 631 164, 300 600, $\underbrace{22...2}_{12\text{ раз}}$, $\underbrace{88...8}_{37\text{ раз}}$, $\underbrace{66...6}_{25\text{ раз}}$

выберите те, которые:

а) делятся на 4 и на 9;
б) делятся на 4 или на 9;
в) делятся на 4, но не делятся на 9.

295. В числе $\overline{a3609a}$ замените букву a, если возможно, цифрой так, чтобы полученное число делилось:

а) на 5; б) на 4; в) на 3; г) на 9; д) на 11.

296. Докажите, что при любом $n \in N$:

а) число $3^{4n} + 4$ делится на 5;
б) число $9^{2n} + 1$ делится на 2;
в) число $7^{2n+1} + 2^{4n+2}$ делится на 11.

297. Используя тот факт, что 1000 делится на 8, сформулируйте и докажите признак делимости на 8.

298. Докажите, что, кроме доказанного признака делимости на 4, имеет место другой признак: число делится на 4 тогда и только тогда, когда сумма цифры единиц и удвоенной цифры десятков делится на 4.

299. Верно ли утверждение:

а) если число делится на 3 и 8, то оно делится на 24;
б) если число делится на 4 и 9, то оно делится на 36;
в) если число делится на 4 и 6, то оно делится на 24;
г) если число делится на 15 и 8, то оно делится на 120?

300. Сформулируйте признак делимости:

а) на 6; б) на 12; в) на 15; г) на 36.

301. Какие из данных чисел

5 645 112, 863 210, 685 425, 2 786 000

делятся:

а) на 6; б) на 12; в) на 15; г) на 33?

302. Делится ли на 99 число:

а) 121 968; б) 1 106 424; в) $\underbrace{11...1}_{27\text{ раз}}$?

303. Сократите дробь:

а) $\frac{222}{270}$; б) $\frac{165}{360}$; в) $\frac{525}{600}$; г) $\frac{396}{407}$.

304. Укажите наименьшее и наибольшее трехзначные числа, кратные:

а) 5; б) 9; в) 6; г) 15; д) 22.

305. Можно ли, переставляя цифры числа 752 046, получить число, которое кратно:

а) 6; б) 50; в) 75; г) 12?

306. В числе $\overline{b7483b}$ замените b цифрой так, чтобы полученное число делилось на 6. Рассмотрите все возможные случаи.

307. Замените звездочки цифрами так, чтобы число 2*4* делилось: а) на 15; б) на 36.

308. Докажите, что при любом натуральном n является целым числом значение выражения:

а) $\frac{10^n+17}{9}$; б) $\frac{10^{2n}+8}{12}$; в) $\frac{10^n+134}{18}$.

309. Не выполняя деления, найдите остаток, который получится при делении на 9 числа:

а) 867 724; б) 143 703; в) 300 806.

310. Найдите все пары натуральных чисел, удовлетворяющих уравнению:

а) $xy = 11$; в) $xy - 2x - y = 9$;

б) $(x - 1)(y - 2) = 11$; г) $xy - 2x - y = 11$.

311. Сколько нечетных натуральных чисел, не превосходящих 100, не делятся ни на 3, ни на 5?

Упражнения для повторения

312. Не вычисляя значение a, определите, является ли оно целым числом, если:

а) $a = 216 : \frac{1}{16}$; б) $a = 2304 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)$; в) $a = -7185 : \frac{5}{6}$.

313. Имеется два вида конвертов без марок и три вида марок. Сколькими способами можно выбрать конверт и марку для одного письма?

314. При каких значениях a, b, c, d является тождеством равенство:

а) $x^4 + x^3 + x^2 + 2 = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$;

б) $x^4 + 2x^2 - x + 2 = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$?

15. Простые и составные числа

Напомним известные вам определения простого и составного чисел. *Простым* числом называется такое натуральное число, которое имеет только два натуральных делителя: 1 и само это число. *Составным* числом называется такое натуральное число, которое имеет более двух натуральных делителей. Число 1 не является ни простым, ни составным числом.

Последовательность простых чисел, взятых в порядке возрастания, начинается так:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, \ldots .$$

Для нахождения простых чисел в III в. до н. э. древнегреческий ученый Эратосфен разработал специальный метод «отсеивания» составных чисел – так называемое «решето Эратосфена». В настоящее время составлены таблицы, содержащие миллионы простых чисел. Естественно, возникает вопрос, найдется ли среди простых чисел наибольшее. Ответ на этот вопрос был дан еще в III в. до н. э. греческим математиком Евклидом, который доказал, что простых чисел «больше, чем любое число их», т. е. бесконечно много. Проведем соответствующее доказательство.

Т е о р е м а. ***Множество простых чисел бесконечное.***

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим, что множество простых чисел конечное. Тогда существует наибольшее простое число. Обозначим его через p_n. Составим произведение простых чисел $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot p_n$ и рассмотрим число p, равное $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$.

Число p не является простым, так как $p > p_n$, а по предположению p_n — наибольшее простое число. Оно не является также составным, так как по свойству делимости суммы не делится ни на одно из простых чисел 2, 3, 5, ..., p_n, а других простых чисел по предположению нет. Полученное противоречие показывает, что предположение неверно и, значит, множество простых чисел бесконечное.

В натуральном ряду простые числа распределяются крайне неравномерно. Можно показать, что в нем существуют сколь угодно большие промежутки, не содержащие ни одного простого числа. Действительно, пусть n — произвольное натуральное число. Составим натуральное число $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n(n+1)+1$. Прибавляя по 1, получим последовательные натуральные числа:

$$1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n(n+1)+2, \qquad 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n(n+1)+3, \ldots$$
$$\ldots, 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n(n+1)+n, \quad 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n(n+1)+(n+1).$$

Все указанные числа — составные. В самом деле, первое из них делится на 2, второе на 3, ..., предпоследнее на n, последнее на $n+1$. Таким образом, мы выделили в натуральном ряду промежуток от $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n(n+1)+2$ до $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n(n+1)+$ $+(n+1)$ включительно, не содержащий ни одного простого числа.

Многими учеными делались попытки найти какое-либо выражение, значениями которого являются только простые числа. Рассмотрим, например, выражение $F(n)=n^2+n+41$. Вычисляя его значения, получим, что $F(1)=43$, $F(2)=47$, $F(3)=53$, $F(4)=61$, $F(5)=71$, $F(6)=83$. Мы видим, что всякий раз получается простое число. Однако $F(41) = 41^2+41+41 =$ $=41(41+1+1)=41 \cdot 43$, т. е. (41) — составное число. Вообще,

---

Евклид (III в. до н. э.) — древнегреческий ученый, автор самого известного математического сочинения — «Начала» («Элементы»), создатель геометрической системы, на которой основывается вся классическая физика; основоположник геометрической оптики.

Вообще, доказано, что не существует многочлена $P(n)$ с целыми коэффициентами, значением которого при любом n является простое число. Не удалось также найти более сложное выражение, обладающее таким свойством.

Особое внимание математиков к простым числам обусловлено тем, что любое натуральное число, большее единицы, либо является простым, либо разлагается на простые множители. Доказательство этого утверждения содержится в «Началах», там же, где доказывается бесконечность множества простых чисел и приводится алгоритм Евклида. Однако единственность разложения составного числа на простые множители в явном виде Евклид не сформулировал. Лишь в 1801 г. немецкий математик Карл Фридрих Гаусс сформулировал и строго доказал так называемую *основную теорему арифметики*:

для любого натурального числа, большего единицы, существует единственное (с точностью до порядка следования множителей) разложение этого числа на простые множители, т. е. любое натуральное число a, большее 1, можно единственным образом представить в виде $a = p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{n_k}$, где p_1, p_2 ..., p_k — простые числа, n_1, n_2, ..., n_k — натуральные числа.

С понятиями простого и составного числа связаны многие задачи на делимость.

П р и м е р 1. Докажем, что если p — простое число и $p > 5$, то либо $p^2 - 1$, либо $p^2 - 19$ делится на 30.

Так как число p — простое, то в зависимости от остатков, которые могут получаться при делении числа p на 30, оно может иметь вид: $30m + 1$, $30m + 7$, $30m + 11$, $30m + 13$, $30m + 17$, $30m + 19$, $30m + 23$, $30m + 29$. Иначе говоря, число p может быть представлено в одном из видов:

$$30m \pm 1,\ 30m \pm 7,\ 30m \pm 11,\ 30m \pm 13.$$

Выражая отсюда p^2, получим:

$$p^2 = (30m \pm 1)^2 = 900\,m^2 \pm 2 \cdot 30m + 1,$$
$$p^2 = (30m \pm 7)^2 = 900\,m^2 \pm 2 \cdot 30m \cdot 7 + 49,$$
$$p^2 = (30m \pm 11)^2 = 900\,m^2 \pm 2 \cdot 30m \cdot 11 + 121,$$
$$p^2 = (30m \pm 13)^2 = 900\,m^2 \pm 2 \cdot 30m \cdot 13 + 169.$$

Очевидно, что в первом и третьем случаях на 30 делится число $p^2 - 1$, а во втором и четвертом — число $p^2 - 19$.

П р и м е р 2. Докажем, что если $n \in N$ и $n > 1$, то значение выражения $(n^2 + 1)(n - 1)(n + 1) + 5$ является составным числом.

Преобразуем данное выражение в многочлен и разложим этот многочлен на множители:

$$(n^2+1)(n-1)(n+1)+5=(n^2+1)(n^2-1)+5=$$
$$=n^4+4=n^4+4+4n^2-4n^2=(n^2+2)^2-4n^2=$$
$$=(n^2+2+2n)(n^2+2-2n).$$

Если $n \in N$ и $n > 1$, то значение первого множителя является натуральным числом, большим 1. Так как $n^2+2-2n=(n-1)^2+1$, то значение второго множителя при указанных значениях n также является натуральным числом, большим 1.

Таким образом, если $n \in N$ и $n > 1$, то значение выражения $(n^2+1)(n-1)(n+1)+5$ является натуральным числом, имеющим два натуральных делителя, каждый из которых больше 1, а это означает, что оно является составным числом.

315. Выпишите все простые числа от 50 до 100.

316. Из данных чисел

401, 411, 421, 431, 441, 451, 461, 471

выберите простые числа.

317. Найдите все простые числа, на которые делится сумма любых четырех последовательных степеней числа: а) 2; б) 3; в) 5.

318. Укажите наименьшее натуральное число, которое имеет только три простых делителя.

319. Разложите на простые множители число: а) 1176; б) 1020; в) 10!.

320. Сколько натуральных делителей имеет число: а) 32; б) 48; в) 5!?

321. При каком условии число $mn(m+n)$, где $n \in N$, $m \in N$, является составным числом?

322. Докажите, что при любом натуральном n значение выражения $n^3(n+1)-n^2(n-2)+1$ является составным числом.

323. Докажите, что при любом $n \in N$ является составным числом значение выражения:

а) $n^2+7n+12$; б) $2n^2+11n+12$.

324. Докажите, что всякое простое число, большее 3, может быть представлено в виде $6n \pm 1$, где $n \in N$.

325. Докажите, что если p — простое число, большее 5, то либо p^2-1, либо p^2+1 делится на 10.

326. Докажите, что если p — простое число и $p \geqslant 5$, то при делении p^2 на 12 в остатке получается 1.

327. Докажите, что если простое число p равно разности квадратов двух целых чисел, то эти числа равны $\frac{p-1}{2}$ и $\frac{p+1}{2}$.

328. Докажите, что если m — составное число, то число $2^m - 1$ также является составным.

329. Найдите все простые числа p такие, чтобы числа $p + 10$ и $p + 14$ также являлись простыми числами.

330. Простые числа, которые можно найти по формуле $M = 2^p - 1$, где p — простое число, называются числами Мерсенна (по имени французского богослова, философа и математика Марена Мерсенна (1588—1648)). Найдите несколько первых чисел Мерсенна.

Упражнения для повторения

331. При каких целых значениях m уравнение

$$4mx + 2 = 5 + x$$

имеет целые корни?

332. Упростите выражение

$$\frac{1}{(x-3)(x-2)} + \frac{1}{(x-2)(x-1)} + \frac{1}{(x-1)x} + \frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)}.$$

333. Из пунктов A и B, расстояние между которыми равно 270 км, одновременно навстречу друг другу выехали два автомобиля. Скорость одного автомобиля на 10 км/ч меньше скорости другого. Через 2 часа расстояние между автомобилями составило 50 км. Найдите скорость каждого автомобиля.

Контрольные вопросы и задания

1. Дайте определение понятия «a делится на b». Сформулируйте и докажите свойства делимости чисел.

2. Сформулируйте свойства делимости суммы и произведения. Приведите доказательства.

3. Сформулируйте теорему о делении с остатком. Найдите неполное частное и остаток от деления -5 на 4.

4. Сформулируйте признаки делимости на 2, 3, 4, 5, 9, 11, 25. Докажите признаки делимости на 4, 9, 11.

5. Какое число называется простым? Докажите, что среди простых чисел нет наибольшего.

Дополнительные упражнения к главе 2

К параграфу 4

334. Начертите два каких-либо квадрата так, чтобы их пересечением были:

а) прямоугольник; в) треугольник; д) точка.
б) квадрат; г) отрезок;

335. В классе 32 учащихся, каждый из которых посещает факультативные занятия по математике или по физике. Из них 20 учащихся занимаются факультативно математикой, а 16 учащихся — физикой. Сколько учащихся посещают оба факультатива?

336. Из 30 учащихся класса каждый занимается хотя бы в одной из спортивных секций — гимнастической, волейбольной или баскетбольной. В гимнастической секции занимаются 17 учащихся, в волейбольной — 14, в баскетбольной — 12. При этом 7 учащихся занимаются гимнастикой и волейболом, 5 — гимнастикой и баскетболом, 3 — волейболом и баскетболом. Сколько учащихся этого класса занимаются во всех трех секциях?

337. Из 32 владельцев участков, входящих в кооператив, каждый выращивает крыжовник, смородину или малину. Известно, что 25 человек выращивают крыжовник, 28 человек — смородину, 29 человек — малину. При этом 20 человек выращивают крыжовник и смородину, 18 — крыжовник и малину, а 10 человек выращивают ягоды всех трех видов. Сколько человек выращивают смородину и малину?

338. Верно ли, что при любом целом m является целым числом значение выражения:

а) $\dfrac{3m^2-m-2}{3m+2}$; б) $\dfrac{2m^2+5m-12}{m+4}$?

339. Известно, что при некоторых x и y значение дроби $\frac{2x-3y}{y}$ является целым числом. Верно ли, что при тех же x и y целым числом является значение выражения $\frac{5y+16x}{y}$?

340. Известно, что при некоторых значениях m и n значение дроби $\frac{m}{n}$ является целым числом. Является ли целым числом при тех же m и n значение дроби:

а) $\frac{5m^2-3n^2}{n^2}$; б) $\frac{(4m-n)(4m+n)}{n^2}$; в) $\frac{(m-n)(m^2+mn+n^2)}{n^3}$?

341. Найдите все целые значения a, при которых значение дроби $\frac{a^2+4}{a-1}$ является целым числом.

342. Найдите все целые значения m, при которых корень уравнения

$$mx - 2x = m^2 + 2$$

является целым числом.

К параграфу 5

343. Докажите, что:

а) $9^2 + 3^5 + 27^2$ делится на 39;
б) $25^2 - 5^2 - 125$ делится на 95;
в) $4^6 + 8^5 - 2^{10}$ делится на 44;
г) $6^5 - 36^2 + 216$ делится на 93.

344. Докажите, что если сумма целых чисел a, b и c делится на 6, то сумма их кубов также делится на 6.

345. Докажите, что среди семи целых чисел найдутся хотя бы два числа, разность которых делится на 6.

346. Докажите, что если целые числа a и b при делении на натуральное число n дают равные остатки, то числа a^m и b^m, где $m \in N$, при делении на n также дают равные остатки. Используя этот вывод, найдите остаток от деления:

а) 5^{114} на 6; б) 3^{129} на 8.

347. При делении на 7 число m ($m \in Z$) дает остаток 1, число n ($n \in Z$) — остаток 3, а число p ($p \in Z$) — остаток 2. Докажите, что число $12m + 11n + 2p$ делится на 7.

348. Целое число x при делении на 5 дает остаток 1. Какой остаток получится при делении на 5 числа x^2; числа x^3?

349. Докажите, что если при делении целого числа x на 4 получается остаток 1, то число $x^2 + x - 2$ делится на 4.

350. Какие остатки могут получиться при делении квадрата натурального числа:

а) на 6; б) на 8?

351. Найдите наименьшее натуральное число, которое:

а) при делении на 5 дает остаток 1, а при делении на 6 — остаток 2;

б) при делении на 9 дает остаток 5, а при делении на 4 — остаток 3.

352. При делении натурального числа n, меньшего 60, на числа 3, 4 и 5 получили соответственно остатки a, b и c. Докажите, что число n равно остатку от деления числа $40a + 45b + 36c$ на 60.

353. Докажите, что при любом целом n значение выражения:

а) $n^3 + 5n$ делится на 6; б) $2n^6 - n^4 - n^2$ делится на 36.

354. Докажите, что если каждое из целых чисел m и n не кратно 3, то число $m^2 - n^2$ делится на 3.

355. Докажите, что если числа m ($m \in Z$) и 6 взаимно просты, то разность $m^2 - 1$ делится на 6.

356. Делится ли число $\underbrace{44\ldots4}_{30\text{ раз}}$:

а) на 4; б) на 3; в) на 9; г) на 6; д) на 66?

357. Докажите, что если n — простое число и $n > 3$, то разность $n^2 - 1$ делится на 24.

358. Докажите, что при любом целом a разность $a^6 - a^2$ делится на 30.

359. Докажите, что квадрат любого простого числа, большего 3, при делении на 12 дает остаток 1.

ГЛАВА 3

ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА. КВАДРАТНЫЕ КОРНИ

§ 6. МНОЖЕСТВО РАЦИОНАЛЬНЫХ И МНОЖЕСТВО ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

16. Рациональные числа

В множестве целых чисел не всегда возможно выполнить деление. Но если расширить множество целых чисел, введя дробные числа, такие как $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$, $\frac{7}{6}$, $-\frac{7}{6}$ и т. д., то в множестве целых и дробных чисел деление становится выполнимым. Целые и дробные числа составляют множество *рациональных чисел*. Слово «рациональное» происходит от латинского слова *ratio* — отношение (частное).

Множество рациональных чисел обозначают буквой Q (первая буква французского слова *qutient* — отношение). В этом множестве выполнимы сложение, вычитание, умножение и деление, кроме деления на нуль. В результате выполнения любой из этих операций над рациональными числами получается рациональное число, т. е. множество рациональных чисел Q замкнуто относительно четырех арифметических операций (исключая деление на нуль). Например:

$$\frac{3}{10}+\frac{2}{15}=\frac{13}{30};\quad \frac{7}{8}-\frac{3}{4}=\frac{1}{8};\quad -\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{5}=-\frac{1}{2};\quad -\frac{4}{9}:\left(-\frac{5}{9}\right)=\frac{4}{5}.$$

Вообще

если $a \in Q$ и $b \in Q$, то $a+b \in Q$, $a-b \in Q$, $ab \in Q$;

если $a \in Q$ и $b \in Q$ и $b \neq 0$, то $a : b \in Q$.

Рациональные числа применяются при измерении величин (длин, площадей, объемов, промежутков времени и др.). Так, например, если длину отрезка OB (рис. 12) принять за единицу

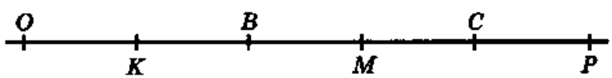


Рис. 12

длины и обозначить ее буквой e, то $OB = 1e$, $OK = \frac{1}{2}e$, $OM = \frac{3}{2}e$, $OC = 2e$, $OP = \frac{5}{2}e$.

Если единичный отрезок OB (рис. 13) разделить на 3 равные части, то при той же единице длины e получим: $OX = \frac{1}{3}e$, $OY = \frac{2}{3}e$, $OZ = \frac{4}{3}e$.

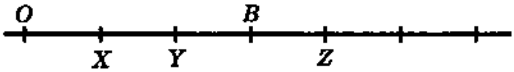


Рис. 13

Положительные рациональные числа записываются в виде обыкновенных дробей, а отрицательные — в виде обыкновенных дробей со знаком минус. Одно и то же рациональное число может быть представлено многими способами. Например,

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \ldots, \quad -\frac{1}{2} = -\frac{2}{4} = -\frac{3}{6} = -\frac{4}{8} = \ldots .$$

Так как черта дроби является одновременно и знаком деления, то и дробное отрицательное число можно записать в виде дроби, например: $-\frac{1}{2} = \frac{-1}{2}$, $-\frac{3}{5} = \frac{-3}{5}$, $-\frac{7}{4} = \frac{-7}{4}$. Таким же образом можно представить любое целое число в виде дроби с любым натуральным знаменателем. Возьмем, например, знаменатель 2, получим:

$$-3 = \frac{-6}{2},\ -2 = \frac{-4}{2},\ -1 = \frac{-2}{2},\ 0 = \frac{0}{2},\ 1 = \frac{2}{2},\ 3 = \frac{6}{2}.$$

Вообще любое рациональное число можно представить в виде дроби, числитель которой — целое число, а знаменатель — натуральное, т. е. в виде ***отношения целого числа к натуральному***. Для каждого числа существует сколько угодно таких дробей, но среди них есть лишь одна дробь с наименьшим знаменателем. Для целых чисел таким знаменателем является число 1.

Так,

$$-3 = \frac{-3}{1},\ -2 = \frac{-2}{1},\ -1 = \frac{-1}{1},\ 0 = \frac{0}{1},\ 1 = \frac{1}{1},\ 2 = \frac{2}{1},\ 3 = \frac{3}{1}.$$

Рассмотрим теперь вопрос о представлении рациональных чисел в виде десятичных дробей. Обыкновенную дробь, знаменатель которой равен степени числа 10, записывают в виде *десятичной дроби*. Например:

$$\frac{3}{10} = 0{,}3; \qquad \frac{14}{100} = 0{,}14; \qquad \frac{4005}{1000} = 4{,}005.$$

Если знаменатель обыкновенной дроби содержит лишь простые множители 2 или 5, то ее можно привести к знаменателю, представляющему степень числа 10, и записать в виде десятичной дроби. Например:

$$\frac{7}{25} = \frac{28}{100} = 0{,}28; \quad \frac{43}{20} = 2\frac{3}{20} = 2\frac{15}{100} = 2{,}15.$$

Если знаменатель несократимой дроби содержит другие простые множители, кроме множителей 2 и 5, то ее нельзя представить в виде десятичной дроби. Например, дроби $\frac{17}{6}$ и $\frac{9}{11}$ нельзя привести к знаменателю, являющемуся степенью числа 10, и поэтому нельзя записать в виде десятичной дроби. В таких случаях при делении числителя на знаменатель не может получиться в остатке 0 и деление продолжается бесконечно:

$$\begin{array}{l|l} 17 & 6 \\ \hline 50 & 2{,}8333\ldots \\ 20 & \\ 20 & \\ 20 & \\ 2 & \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} 9 & 11 \\ \hline 90 & 0{,}8181\ldots \\ 20 & \\ 90 & \\ 20 & \\ 9 & \end{array}$$

Считают, что эти дроби обращаются в *бесконечные десятичные дроби*:

$$\frac{17}{6} = 2{,}8333\ldots; \quad \frac{9}{11} = 0{,}8181\ldots\ .$$

В таких дробях начиная с некоторого момента одна цифра или группа цифр бесконечно повторяются. Это объясняется неизбежным повторением остатков при делении. Повторяющуюся цифру или группу цифр называют *периодом*. Так, в бесконечных десятичных дробях 2,8333... и 0,8181... периодами являются 3 и 81.

Бесконечные десятичные периодические дроби записывают короче: выписывают все цифры до первого периода и приписывают к ним период, заключенный в круглые скобки.

Например,

$$\frac{17}{6} = 2,8333... = 2,8(3); \quad \frac{9}{11} = 0,8181... = 0,(81).$$

Читают: 2 целых 8 десятых и 3 в периоде; 0 целых 81 в периоде.

Любую конечную десятичную дробь можно представить в виде бесконечной десятичной периодической дроби, приписав к десятичной дроби бесконечную последовательность нулей. Например,

$$4,271 = 4,271000... = 4,271(0);$$
$$-5,68 = -5,68000... = -5,68(0).$$

Таким же способом можно представить любое целое число в виде бесконечной десятичной периодической дроби.

Например,

$$75 = 75,000... = 75,(0); \ -32 = -32,000... = -32,(0);$$
$$0 = 0,000... = 0,(0).$$

Значит, ***любое рациональное число можно представить в виде бесконечной десятичной периодической дроби.*** Верно и обратное утверждение: ***любая бесконечная периодическая десятичная дробь представляет некоторое рациональное число.***

Возьмем, например, бесконечную десятичную периодическую дробь $x = 0,8333... = 0,8(3)$. Умножив ее на 10, получим $10x = 8,333... = 8,(3)$. Разность $10x - x$ равна 7,5:

$$\begin{array}{r} _{-}\,8,333... \\ \underline{0,833...} \\ 7,5 \end{array}$$

Отсюда $\quad 9x = 7,5; \quad x = \frac{75}{90}; \quad x = \frac{5}{6}.$

Значит, $0,8(3) = \frac{5}{6}$.

Таким образом можно обратить любую бесконечную десятичную периодическую дробь в обыкновенную. Заметим, что бесконечная десятичная дробь с периодом 9 обращается в натуральное число или десятичную дробь.

Пусть, например, $x = 5{,}6(9)$, тогда

$$10x = 56{,}(9),$$
$$10x - x = 51{,}3,$$
$$9x = 51{,}3,$$
$$x = 5{,}7.$$

Так как любой десятичной дроби соответствуют две бесконечные десятичные дроби, одна с периодом 9, другая с периодом 0, то дроби с периодом 9 обычно не рассматривают.

360. Какие из чисел -100; $-\frac{3}{5}$; $\frac{4}{10}$; 7; -8; $\frac{9}{2}$; 0; $-\frac{6}{1}$; 1 являются:

а) целыми положительными;

б) целыми отрицательными;

в) дробными положительными;

г) дробными отрицательными?

361. Верно ли, что:

а) $\frac{4}{7} \cdot \frac{14}{5} : \frac{2}{5} \in N$;

б) $\left(\frac{1}{2} - \frac{5}{8}\right) : \frac{1}{8} \in Z$;

в) $\left(\frac{3}{4} - \frac{2}{3}\right) \cdot \frac{6}{5} \in Q$;

г) $\frac{7}{15} \cdot \frac{5}{7} - 3 : 9 \in N$;

д) $\frac{2}{3} \cdot \left(1 - \frac{5}{6}\right) : \frac{1}{3} \in Q$;

е) $\frac{6}{7} : \left(2 - \frac{5}{7}\right) \cdot \frac{1}{2} \in Z$?

362. Верно ли, что:

а) если $a \in N$, то $a \in Z$ и $a \in Q$;

б) если $a \in Z$, то $a \in N$ и $a \in Q$?

363. Напишите два значения x, при которых:

а) $x \in Z$ и $x \in N$;

б) $x \in Q$ и $x \in Z$;

в) $x \in Q$ и $x \in N$.

364. Напишите две дроби, знаменателем которых яляется число 17 и которые выражают натуральные числа.

365. На рисунке 14 кругами изображены множества Q и Z. Множеству каких чисел соответствует заштрихованная часть?

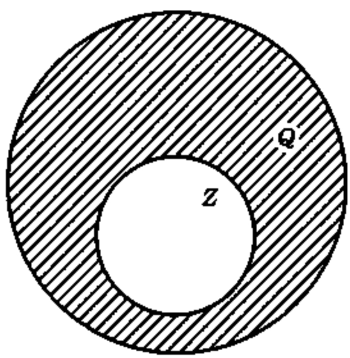


Рис. 14

366. Представьте каждое из чисел 0; 5; −6; 1,4; 0,25 и −0,75 в виде дроби с целым числителем и наименьшим натуральным знаменателем.

367. Представьте каждое из чисел $-\frac{4}{6}$; $-\frac{12}{8}$; −1,2; −8 и $2\frac{2}{4}$ двумя способами в виде дроби $\frac{a}{b}$, где $a \in \boldsymbol{Z}$ и $b \in \boldsymbol{N}$.

368. Сравните рациональные числа:

а) −2,7 и −2,69; в) $-\frac{5}{6}$ и $-\frac{6}{7}$; д) $-1\frac{6}{11}$ и $-1\frac{8}{15}$;

б) $\frac{7}{8}$ и $\frac{8}{9}$; г) $3\frac{3}{4}$ и $3\frac{5}{7}$; е) $1\frac{7}{8}$ и 1,875.

369. Сравните числа:

а) $\frac{2}{7}$ и 0,(3); в) 2,7(8) и 2,8(7);

б) 1,(65) и $1\frac{12}{25}$; г) −62,31(564) и −62,31(465).

370. Назовите пять рациональных чисел, заключенных между числами:

а) 5,01 и 5,02; г) $-\frac{8}{11}$ и $-\frac{9}{11}$;

б) − 1,1 и − 0,99; д) 32,0(62) и 32,0(70);

в) $\frac{5}{7}$ и $\frac{6}{7}$; е) −5,3(4) и −5,3(5) .

371. Напишите пять дробных чисел, заключенных между числами:

а) 6,3 и 7,3; в) $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{2}$; д) 0,1(7) и 0,1(8);

б) −8,9 и −5,1; г) $-\frac{1}{5}$ и $-\frac{1}{4}$; е) −3,2(52) и −3,2(51).

372. Представьте в виде бесконечной десятичной периодической дроби число:

а) $\frac{2}{3}$; в) $-\frac{1}{3}$; д) −23; ж) $4\frac{3}{16}$;

б) $\frac{19}{15}$; г) 18; е) $-\frac{12}{15}$; з) $5\frac{1}{33}$.

373. Запишите в виде бесконечной десятичной периодической дроби число:

а) $-\frac{5}{6}$; б) $\frac{101}{8}$; в) $-\frac{48}{125}$; г) $\frac{12}{7}$.

374. Представьте в виде обыкновенной дроби число:

а) 1,(3); в) 1,6(7); д) 5,2(45);

б) 2,(25); г) 0,41(6); е) 3,6(020).

375. Найдите значение выражения:

а) 3,1(28) + 2,(21); б) 3,1(28) + 2,4(1).

376. Найдите модуль разности x и y, если:

а) $x = 7,(8)$ и $y = 5,(4)$; б) $x = 1,(38)$ и $y = 2,(57)$.

Результат округлите до десятых.

377. Начертите отрезок. Пусть его длина равна $1e$. Постройте отрезки длиной $\frac{1}{2}e$, $0{,}1e$, $\frac{4}{3}e$. Каким числом выражается длина каждого из построенных отрезков, если единица длины $\frac{1}{4}e$?

Упражнения для повторения

378. Докажите, что при любом целом значении x является целым числом значение дроби:

а) $\dfrac{x^2(x^2+8)+16}{x^2+4}$; б) $\dfrac{6(x^4-2x)-3(2-4x)}{x^2+1}$.

379. Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{x-1}{x+1}$. Найдите:

а) $f(2)$; б) $f\left(\frac{1}{2}\right)$; в) $f\left(\frac{1}{a}\right)$; г) $f\left(\frac{a+1}{a-1}\right)$.

17. Действительные числа

В множестве рациональных чисел выполнимы операции: сложение, вычитание, умножение и деление (за исключением деления на нуль). Однако рациональных чисел недостаточно для измерения величин. Рассмотрим десятичное измерение отрезков.

Примем длину отрезка OB (рис. 15) за единицу длины и обозначим ее буквой e. Тогда

$$OB = 1e.$$

Рис. 15

Измерим длину отрезка OK. В отрезке OK единичный отрезок OB укладывается 2 раза, и при этом получается остаток CK, который меньше, чем OB. Значит, длина $2e$ есть приближенное значение длины отрезка OK с точностью до 1:

$$OK \approx 2e.$$

Разделим отрезок OB на 10 равных частей. Десятая часть этого отрезка укладывается в остатке CK 4 раза, и получается остаток, меньший 0,1 отрезка OB. Значит, длина $2{,}4e$ есть приближенное значение длины отрезка OK с точностью до $0{,}1e$:

$$OK \approx 2{,}4e.$$

Таким образом можно неограниченно повышать точность измерения, находя сотые, тысячные и т. д. доли длины отрезка OK.

В процессе десятичного измерения отрезков на каком-то шаге может не получиться остаток. Тогда результатом измерения будет десятичная дробь или натуральное число. Если же остаток будет получаться всегда, то результатом измерения будет бесконечная десятичная дробь.

Получающиеся при десятичном измерении отрезков бесконечные десятичные дроби далеко не всегда оказываются периодическими. Например, длина диагонали квадрата, сторона которого равна $1e$ (рис. 16), будет выражаться бесконечной десятичной непериодической дробью. Действительно, если бы эта дробь оказалась периодической, то она представляла бы рациональное число, которое можно записать в виде несократимой обыкновенной дроби $\frac{m}{n}$, где m и n — натуральные числа. Если на диагонали AC квадрата построить другой квадрат (рис. 17),

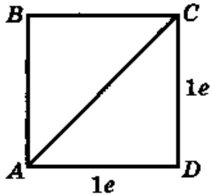


Рис. 16

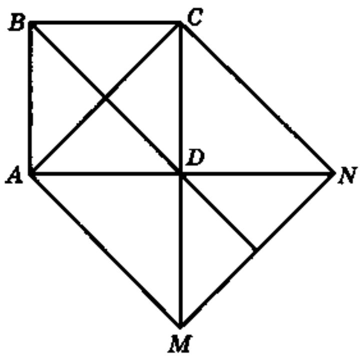


Рис. 17

то его площадь будет в 2 раза больше площади первого квадрата. Так как площадь первого квадрата $1e^2$, то площадь второго равна $2e^2$. Значит,

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2.$$

Теперь докажем, что не существует рационального числа, квадрат которого равен 2. Это число не может быть натуральным, так как $1^2 < 2$, $2^2 > 2$, $3^2 > 2$ и т. д.

Из равенства $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$ получаем: $\frac{m^2}{n^2} = 2$, $m^2 = 2n^2$. Так как $2n^2$ — четное число и $n \neq 1$, то m^2 — четное и потому m — четное число. Значит, m можно представить в виде $2k$, где k — натуральное число.

Получим:

$$(2k)^2 = 2n^2, \quad 4k^2 = 2n^2, \quad 2k^2 = n^2.$$

Из последнего равенства следует, что n — четное число, а поэтому дробь $\frac{m}{n}$ сократима. Получили противоречие, откуда следует, что нет такого рационального числа, квадрат которого равен двум.

Действительно, длина диагонали квадрата AC (см. рис. 16) не может выражаться рациональным числом, если за единицу длины принять длину стороны квадрата. Говорят, что диагональ квадрата *несоизмерима* с его стороной. Вообще, если длина некоторого отрезка не выражается через другой отрезок, принятый за единичный, рациональным числом, то эти отрезки называют *несоизмеримыми*.

Чтобы длина каждого отрезка, а следовательно, и координата каждой точки координатной прямой выражались числом, надо к множеству рациональных чисел, т. е. множеству бесконечных десятичных периодических дробей, добавить бесконечные десятичные непериодические дроби. Получим множество *действительных чисел*. Его обозначают буквой $\boldsymbol{R}$ (первая буква латинского слова *realis* — реальный, существующий в действительности). Бесконечные десятичные непериодические дроби называют *иррациональными числами* (приставка «ир» означает отрицание). Примером иррационального числа может служить число $\pi = 3{,}1415926536...$. Значит, множество действительных чисел состоит из рациональных и иррациональных чисел.

Между множеством действительных чисел и множеством точек координатной прямой существует взаимно однозначное соответствие, т. е. каждому действительному числу соответствует единственная точка координатной прямой и каждой точке координатной прямой соответствует единственное действительное число.

Действительные числа можно сравнивать так, как сравнивают десятичные дроби. Для положительных чисел сначала сравнивают целые части. Если они равны, сравнивают разряды десятых. Если и в них единиц поровну, сравнивают разряды сотых и т. д.

Например,

$6{,}513... < 6{,}520...;$ $\qquad$ $-1{,}807... > -1{,}808...$.

Если изобразить на координатной прямой два действительных числа, то меньшее из них будет располагаться левее большего.

В множестве действительных чисел выполнимы операции сложение, вычитание, умножение и деление (исключая деление на нуль), т. е. множество действительных чисел $\boldsymbol{R}$ замкнуто относительно этих операций. С помощью десятичных дробей можно найти приближенные значения суммы, разности, произведения и частного с любой степенью точности. Найдем, например, три первые цифры произведения ab, если $a = 1{,}(3)$ и $b = 0{,}616616661...$ (группы цифр, состоящие из одной, двух, трех и т. д. шестерок разделяются единицами). Будем перемножать приближенные значения a и b с недостатком и с избытком, повышая с каждым шагом точность:

$$a = 1{,}333333...;\ b = 0{,}616616661...;$$
$$1 \cdot 0 = 0;\ 2 \cdot 1 = 2;$$
$$0 < ab < 2.$$

Первая цифра в произведении ab есть 0 или 1.

$$1{,}3 \cdot 0{,}6 = 0{,}78;\ 1{,}4 \cdot 0{,}7 = 0{,}98;$$
$$0{,}78 < ab < 0{,}98.$$

Первая цифра в произведении ab есть 0.

$$1{,}33 \cdot 0{,}61 = 0{,}8113;\ 1{,}34 \cdot 0{,}62 = 0{,}8308;$$
$$0{,}8113 < ab < 0{,}8308.$$

Вторая цифра в произведении ab есть 8.

$$1{,}333 \cdot 0{,}616 = 0{,}821128;\ 1{,}334 \cdot 0{,}617 = 0{,}823078;$$
$$0{,}821128 < ab < 0{,}823078.$$

Третья цифра в произведении ab есть 2.
Значит,

$$ab = 0{,}82\ldots\ .$$

Таким образом, можно найти сколько угодно цифр произведения или суммы. Описание этих способов может служить определением сложения и умножения действительных чисел.

380. Какие из чисел $2\frac{3}{7}$; $-3{,}(24)$; 0; 5,727727772... (группы цифр, состоящие из одной, двух, трех и т. д. семерок, разделяются двойками); 6,323232... (группа цифр, состоящая из тройки и двойки, бесконечно повторяется) являются:

а) рациональными; б) иррациональными?

381. Каким из множеств $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{Q}$ и $\boldsymbol{R}$ принадлежит:
а) 6,(0); б) −1,35(0); в) 0,8(671); г) π?

382. Принадлежат ли множествам $\boldsymbol{Q}$ и $\boldsymbol{R}$ корни уравнения $x^2 = 2$?

383. Какое число принадлежит $\boldsymbol{R}$ и не принадлежит $\boldsymbol{Q}$? Приведите пример.

384. Верно ли, что если:
а) $x \in \boldsymbol{Z}$, то $x \in \boldsymbol{Q}$ и $x \in \boldsymbol{R}$;
б) $x \in \boldsymbol{Q}$, то $x \notin \boldsymbol{N}$ и $x \in \boldsymbol{R}$;
в) $x \in \boldsymbol{R}$, то $x \in \boldsymbol{Q}$;
г) $x \in \boldsymbol{R}$ и $x \in \boldsymbol{N}$, то $x \in \boldsymbol{Z}$?

385. Напишите три числа, которые принадлежат:
а) $\boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{Z}$; б) $\boldsymbol{N}$ и $\boldsymbol{R}$; в) $\boldsymbol{Q}$ и $\boldsymbol{R}$; г) $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{Q}$ и $\boldsymbol{R}$.

386. Сравните:
а) 101,71... и 110,8...; г) 4,446... и −0,303...;
б) −4,315... и −4, 318...; д) −1,234... и −2,221...;
в) 4,9(18) и 4,928...; е) −0,123... и −0,121... .

387. Какие из целых чисел расположены между числами:
а) −3,81... и 2,13...; в) −5,111... и −1,212...;
б) 0,068... и 4,032...; г) −4,26... и 0?

388. Расположите числа 5,28; −1,634...; −1,34; −1,(3); 2,3(4) и 2,(34):

а) в порядке возрастания; б) в порядке убывания.

389. Укажите какое-нибудь иррациональное число a, которое удовлетворяет двойному неравенству:

а) $0{,}2 < a < \frac{2}{3}$; б) $\frac{3}{7} < a < 0{,}5$.

390. Найдите три первые цифры суммы

$$61{,}8129... + 37{,}6828... .$$

391. Может ли сумма двух бесконечных десятичных периодических дробей быть бесконечной десятичной непериодической дробью?

392. Найдите четыре первые цифры длины окружности в сантиметрах, радиус которой равен 2,35 см.

393. Радиус окружности равен 1,4 см. Найдите две первые цифры площади круга в квадратных сантиметрах.

394. Может ли сумма двух положительных иррациональных чисел быть рациональным числом?

395. Докажите, что если a^2, b^2, $a - b$, где $a \neq b$, — рациональные числа, то $a + b$ — рациональное число.

396. Известно, что $a + b$ — рациональное число, а числа a и b — иррациональные. Каким числом (рациональным или иррациональным) будет число:

а) $a - b$; б) $3a + 5b$?

397. Число a — рациональное, а число b — иррациональное. Каким числом, рациональным или иррациональным, является:

а) $3a + b$; б) $a + 2b$; в) $a^2 + 4a + b$; г) $3a^2 - a + 4b$?

Упражнения для повторения

398. Сравните числа:

а) 3,4(12) и 3,(412);
б) −2,5(67) и −2,56(7);
в) 0,9(56) и 0,9(506);
г) −1,4(302) и −1,4(32).

399. Упростите выражение:

а) $\left(\frac{a+b}{a^2 - 2ab + b^2} - \frac{a}{a^2 - b^2}\right) \cdot \frac{a-b}{ab + b^2}$;

б) $\left(\frac{a^3}{a^2 + b^2 + 2ab} - \frac{a^2}{a+b}\right) : \left(\frac{a^2}{a^2 - b^2} - \frac{a}{a+b}\right)$.

400. При каких значениях a и b прямые $y = -2x + b$ и $y = ax - b$ пересекаются в точке $(3; -1)$?

18. Числовые промежутки

В дальнейшем нам часто будут встречаться подмножества множества действительных чисел, называемые числовыми промежутками.

Отметим на координатной прямой два действительных числа a и b, из которых a меньше b (рис. 18).

Рис. 18

Множество чисел, расположенных между числами a и b, называют *числовым интервалом* или просто *интервалом от a до b*. Его обозначают с помощью круглых скобок: $(a;\ b)$.

Интервал от a до b показан на рисунке 19 штриховкой. Светлые кружки означают, что числа a и b не принадлежат итервалу $(a;\ b)$.

$(a; b)$

Рис. 19

Если к интервалу $(a;\ b)$ добавить числа a и b, то получится числовой промежуток, который называют *числовым отрезком* или просто *отрезком* и обозначают с помощью квадратных скобок: $[a;\ b]$. Отрезок $[a;\ b]$ изображен на рисунке 20.

$[a; b]$

Рис. 20

Если к интервалу $(a;\ b)$ добавить лишь одно из чисел a или b, то получится еще два числовых промежутка. Их называют *полуинтервалами* и обозначают с помощью круглой и квадратной скобок: $[a;\ b)$ и $(a;\ b]$. Полуинтервалы $[a;\ b)$ и $(a;\ b]$ изображены на рисунках 21 и 22.

$[a; b)$

Рис. 21

$(a; b]$

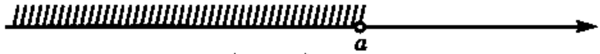
Рис. 22

$(a; +\infty)$

Рис. 23

$[a; +\infty)$

Рис. 24



$(-\infty; a)$

Рис. 25

$(-\infty; a]$

Рис. 26

Отметим на координатной прямой число a. Множество чисел, больших числа a (рис. 23), называется *открытым числовым лучом* или просто *открытым лучом* от a до плюс бесконечности и обозначается с помощью круглых скобок: $(a; +\infty)$. Если к этому промежутку добавить число a, то получим *числовой луч* от a до $+\infty$. Его обозначают так: $[a; +\infty)$ (рис. 24).

На рисунках 25 и 26 изображены открытый луч $(-\infty; a)$ и луч $(-\infty; a]$. Числовой промежуток от $-\infty$ до $+\infty$, который состоит из всех действительных чисел, называют *числовой прямой* и обозначают $(-\infty; +\infty)$.

401. Изобразите на координатной прямой числовой промежуток:

а) $(-3; 4)$; в) $(-5; -2]$; д) $(-1; +\infty)$; ж) $[2; +\infty)$;

б) $[-5; 0]$; г) $[1; 6]$; е) $(-\infty; 1)$; з) $(-\infty; -1]$.

402. Задайте неравенством числовой промежуток, изображенный на рисунке 27, и запишите его обозначение.

403. Запишите обозначение числового промежутка, представляющего множество чисел x таких, что:

а) $-8 < x < -2$; г) $1 < x \leqslant 9$; ж) $x \geqslant 6$;

б) $4 \leqslant x \leqslant 10$; д) $x > 5$; з) $x \leqslant 8$;

в) $-3 \leqslant x < 2$; е) $x < -7$; и) $x \geqslant -4$.

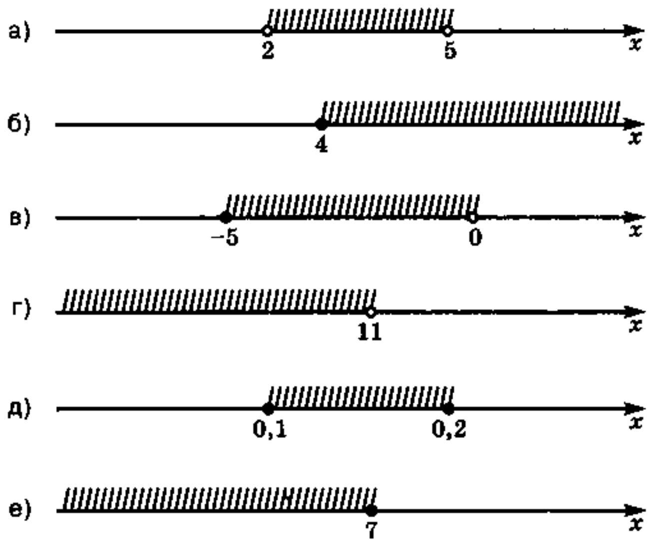


Рис. 27

404. Изобразите на координатной прямой промежуток, представляющий множество A, если:

а) $A = \{x \mid x > -3\}$; г) $A = \{x \mid 4 < x < 6\}$;

б) $A = \{x \mid x < 5\}$; д) $A = \{x \mid 1 \leqslant x < 5\}$;

в) $A = \{x \mid -1 \leqslant x \leqslant 4\}$; е) $A = \{x \mid x \geqslant 2\}$.

405. Изобразите на координатной прямой множество чисел, удовлетворяющих неравенству:

а) $|x| < 2$; в) $|x| \leqslant 3$; д) $|x| < -3$;

б) $|x| > 3$; г) $|x| \geqslant 5$; е) $|x| \geqslant -1$.

406. Какое из множеств $\{x \mid |x| < 4\}$, $\{x \mid |x| \leqslant 3\}$, $\{x \mid |x| > 1\}$ является числовым промежутком? Обозначьте его и изобразите на координатной прямой.

407. Существует ли в промежутке $[6; 15)$ наименьшее число; наибольшее число?

408. Существует ли в промежутке $(-2; 3]$ наименьшее число; наибольшее число?

409. Найдите все целые числа, принадлежащие промежутку:

а) $[-1,5; 2]$; б) $(-4; 4)$; в) $(103; 107]$; г) $\left[-\frac{1}{2}; 3\right)$.

410. Найдите два каких-нибудь дробных числа, принадлежащие интервалу:

а) $(-0{,}5;\ 0{,}5)$; в) $(-0{,}5;\ -0{,}49)$;

б) $\left(1\frac{1}{3};\ 2\frac{1}{2}\right)$; г) $\left(-3\frac{1}{2};\ -3\frac{1}{3}\right)$.

411. Какие из дробей вида $\frac{n}{12}$, где $n \in N$, принадлежат отрезку $\left[\frac{1}{12};\ \frac{1}{2}\right]$?

412. Найдите дроби вида $\frac{1}{n}$, где $n \in N$, принадлежащие отрезку $\left[\frac{1}{36};\ \frac{1}{4}\right]$.

413. Какие дроби вида $\frac{4}{n}$, где $n \in N$, принадлежат промежутку $\left[\frac{1}{12};\ \frac{1}{6}\right]$?

414. Изобразите на координатной прямой числовой промежуток, являющийся пересечением числовых промежутков:

а) $[-2;\ 3]$ и $(0;\ +\infty)$; в) $(-3;\ 2)$ и $(-\infty;\ -2]$;

б) $(-\infty;\ -2)$ и $[-2;\ 0]$; г) $(-\infty;\ 5)$, $[2;\ +\infty)$ и $(0;\ 5]$.

415. Покажите на координатной прямой числовой промежуток, являющийся объединением числовых промежутков:

а) $[-2;\ 3]$ и $(0;\ +\infty)$; в) $(-3;\ 2)$ и $(-\infty;\ -2]$;

б) $(-\infty;\ -2)$ и $[-2;\ 0]$; г) $(-\infty;\ 5)$ и $(7;\ +\infty)$.

416. Верно ли, что:

а) $[-8;\ 7) \cap [-8;\ 8] = [-8;\ 7]$;

б) $(3;\ 16) \cup (0;\ 24) = (3;\ 24)$;

в) $(-\infty;\ -1) \cup (-2;\ +\infty) = (-\infty;\ +\infty)$;

г) $(-\infty;\ 4) \cap (-4;\ +\infty) = (-4;\ 4)$?

417. Является ли числовым промежутком объединение промежутков:

а) $(-3;\ 5]$ и $[5;\ 12)$; г) $(-7;\ 1)$ и $(-5;\ 3)$;

б) $[-2;\ -1)$ и $(-4;\ -2]$; д) $[2;\ 8]$ и $[3;\ 7]$;

в) $[-1;\ 6)$ и $(6;\ 8]$; е) $[-1;\ 1]$ и $[2;\ 4]$?

Упражнения для повторения

418. Сравните числа:

а) 4,35(7) и 4,3(57); б) −6,5(31) и −6,53(1).

419. Представьте каждое из чисел $1\frac{3}{4}$, $-12\frac{5}{6}$, −2,25 и 7,13 в виде дроби с целым числителем и натуральным знаменателем.

420. Учащиеся 8-го класса, выбирая старосту, выделили пять основных кандидатов: Андреева, Борисову, Виктюка, Галкину и Дмитриева. Результаты тайного голосования приведены ниже (фамилии кандидатов сокращены):

Б, Б, В, Г, А, А, Г, В, В, А, Б, Б, Г, Г, А, Д, Д, А, В, А, Д, В, В, Б, А, Г, В, Г, А, Д.

По этим данным составьте таблицу частот.

19. Интервальный ряд данных

В статистических исследованиях важно представлять данные в наглядном, удобном для анализа виде. Одним из таких способов является построение *интервального ряда данных*.

Рассмотрим пример. Учащиеся двух 8-х классов по итогам выполнения теста по русскому языку получили баллы, указанные в таблице (0, 1, 2 и 3 балла не получил ни один из учащихся).

Кол-во учащихся	Баллы																
	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
8А	1	0	0	1	1	0	1	2	2	3	3	4	3	2	1	1	0
8Б	0	1	1	0	0	0	0	2	2	4	4	2	2	3	1	2	1

Объединим учащихся, получивших менее 6 баллов, в первую группу, получивших от 6 до 10 баллов — во вторую группу, от 11 до 15 баллов — в третью, более 16 баллов — в четвертую. Таблица частот в этом случае будет выглядеть так:

Кол-во учащихся	Группа			
	первая (от 1 до 5 баллов)	вторая (от 6 до 10 баллов)	третья (от 11 до 15 баллов)	четвертая (от 16 до 20 баллов)
8А	1	3	14	7
8Б	1	1	14	9

Изобразив эти данные в виде столбчатой диаграммы (рис. 28), можно сравнить результаты, полученные учащимися двух классов (светлый столбик на рисунке — результаты, полученные учащимися 8А класса, темный — учащимися 8Б класса).

Вообще, если исследуют большое количество вариант, то удобно сначала провести их группировку, а затем заменить выборку интервальным рядом. Для этого разность между наибольшим и наименьшим значениями ряда данных делят на равные

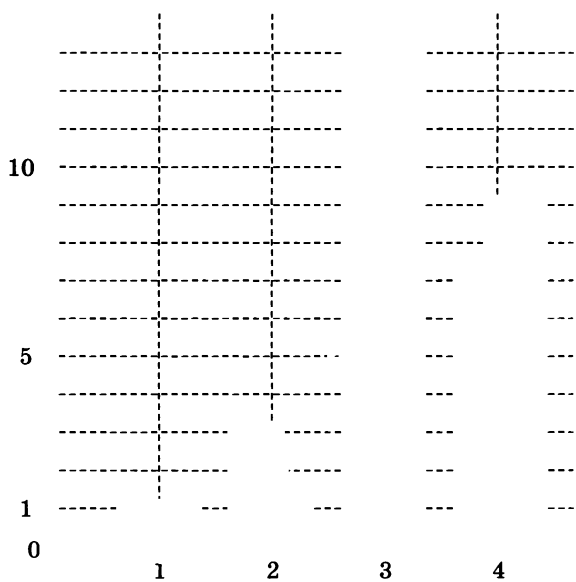


Рис. 28

части, и, округляя полученный результат, определяют длину интервала. В нашем случае наибольшее количество баллов, которое могли получить учащиеся, равно 20, а наименьшее — 0. Следовательно, разделив разность 20 − 0 = 20 на 4, получим длину каждого интервала, равную 5 баллам. За начало первого интервала часто выбирают наименьшую варианту или ближайшее к ней целое число, расположенное левее. Для каждого интервала указывают количество данных, попавших в этот интервал. При этом граничное число обычно относят к следующему интервалу.

В некоторых случаях для анализа статистических данных используют не таблицу частот, а таблицу отношений частот к общему числу данных в ряду. Это отношение, обычно выраженное в процентах, называют *относительной частотой варианты*. В нашем примере *таблица относительных частот* будет иметь вид:

Относительная частота, %	Группа			
	первая	вторая	третья	четвертая
8А	4	12	56	28
8Б	4	4	56	36

Поскольку сумма частот равна объему ряда, то сумма относительных частот составляет 100%. Это полезно помнить для самопроверки.

Заметим, что, говоря о статистике, мы до сих пор чаще всего рассматривали этап обработки полученных данных. Несколько слов стоит сказать и об этапе сбора статистических данных.

Проведение любого массового исследования, будь то организация тестовой проверки всех учащихся целого региона или опрос населения о работе жилищно-коммунального хозяйства, требует больших усилий и финансовых затрат. В тех случаях, когда бывает сложно или даже невозможно провести сплошное исследование, его заменяют выборочным: из всей изучаемой совокупности данных, называемой *генеральной совокупностью*, выделяют определенную часть, т. е. составляют выборочную совокупность данных — *выборку*. Именно она подвергается статистической обработке и исследованию.

Выборочное исследование проводят еще и тогда, когда проведение сплошного исследования связано с порчей или полным уничтожением продукции. Например, исследование повреждений автомобиля при столкновении с неподвижным препятствием (так называемый crash-test) проводят не для всех экземпляров, выпущенных за месяц, а для одного (изредка для нескольких). Такое исследование дает возможность внести в конструкцию автомобиля изменения, повышающие его прочность.

Добавим, что выборка должна быть представительной, *репрезентативной* (от франц. *représentatif* — показательный), т. е. достаточной по объему и отражающей характерные особенности всей генеральной совокупности.

421. У учащихся 8-го класса измерили рост и получили следующие результаты (в сантиметрах):

164; 176; 177; 180; 181; 179; 175; 180; 176; 165; 162; 168; 157; 185; 176; 160; 162; 158; 181; 179; 168; 164; 179; 163; 160; 176; 162; 178; 164; 182.

Представьте эти данные в виде интервального ряда, взяв в качестве длины интервала: а) 5 см; б) 10 см. Для каждого интервального ряда постройте гистограмму.

422. При изучении учебной нагрузки учащихся 8-х классов попросили отметить время, которое они в определенный день затратили на выполнение домашних заданий. Получили следующие данные (с точностью до 0,1 ч):

2,6; 3,4; 3,2; 2,9; 1,9; 1,5; 1,8; 4,2; 1,6; 3,4; 3,2; 3,1; 2,5; 2,7; 3,1; 2,9; 2,8; 1,5; 3,1; 3,4; 2,2; 2,8; 4,1; 2,4; 4,3; 1,9; 3,6; 2,0; 2,8; 3,9.

Представьте полученные данные в виде интервального ряда с длиной интервала 1 ч и составьте соответствующую таблицу относительных частот.

423. Проведите статистическое исследование в своем классе, выяснив среднее время, затрачиваемое каждым учащимся на путь от дома до школы. Полученные результаты запишите в виде интервального ряда данных. Заменив каждый интервал его серединой, найдите среднее время, затрачиваемое учащимися класса на путь от дома до школы.

424. Учащимся 8-х классов небольшого города была предложена контрольная работа по алгебре, состоящая из шести заданий. При подведении итогов была составлена таблица, в которой было указано количество учащихся, верно выполнивших одно, два, три и т. д. задания. Пользуясь этой таблицей, составьте таблицу относительных частот.

Количество выполненных заданий	0	1	2	3	4	5	6
Количество учащихся	0	7	33	87	223	146	54

425. На гистограмме (рис. 29) представлены данные о распределении рабочих цеха по возрастным группам. Пользуясь гистограммой, найдите:

а) число рабочих цеха в возрасте от 28 до 33 лет;
б) число рабочих цеха в возрасте до 33 лет;
в) общее число рабочих цеха;
г) самую многочисленную возрастную категорию рабочих цеха.

426. Является ли выборка репрезентативной (представительной), если при изучении влияния телевизионной рекламы на спрос потребителей были опрошены:

а) юноши в возрасте от 18 до 28 лет;
б) пенсионеры;
в) все члены садового товарищества?

Кол-во
25
20
15
10
5

0–18 18–23 23–28 28–33 33–38 38–43 43–48 48–53 53–58 Возраст

Рис. 29

Упражнения для повторения

427. Решите уравнение:

а) $(2x - 3)(3x + 2) = 0$;

б) $(2x - 3)(3x + 2) = -6$;

в) $(2x - 3)(3x + 2) = 6x^2$.

428. Упростите выражение

$$\left(\frac{x}{2y - 3x} + \frac{2xy}{9x^2 - 4y^2}\right) : \left(\frac{2y - 3x}{2y + 3x} - 1\right).$$

429. Два автомобиля, расстояние между которыми 315 км, выехали навстречу друг другу. Скорость первого автомобиля составляет 50 км/ч, а скорость второго – в 1,2 раза больше. Найдите время, через которое автомобили встретятся, если известно, что второй до встречи сделал остановку на 15 мин.

20. Абсолютная и относительная погрешности

В вычислениях на практике используют, как правило, десятичные дроби с ограниченным числом десятичных знаков. Если дробь бесконечная или содержит слишком много десятичных знаков, ее округляют. Например, иррациональное число π, которое выражается бесконечной десятичной непериодической дробью 3,1415926536..., в зависимости от решаемой задачи округляют до десятых, сотых, тысячных и т. д. Получают различные приближенные значения π, например 3,1; 3,14; 3,142; 3,1416; 3,14159.

Найдем по графику функции $y = 0{,}6x + 1{,}3$ (рис. 30) ее приближенное значение при $x = 1{,}7$; $3{,}6$:

если $x = 1{,}7$, то $y \approx 2{,}3$; если $x = 3{,}6$, то $y \approx 3{,}5$.

По формуле $y = 0{,}6x + 1{,}3$ можно найти точные значения функции при тех же значениях аргумента:

если $x = 1{,}7$, то $y = 2{,}32$; если $x = 3{,}6$, то $y = 3{,}46$.

Приближенные значения отличаются от точных значений на некоторое положительное число. В первом случае оно равно разности между точным и приближенным значениями, а во втором — разности между приближенным значением и точным:

$$2{,}32 - 2{,}3 = 0{,}02; \quad 3{,}5 - 3{,}46 = 0{,}04.$$

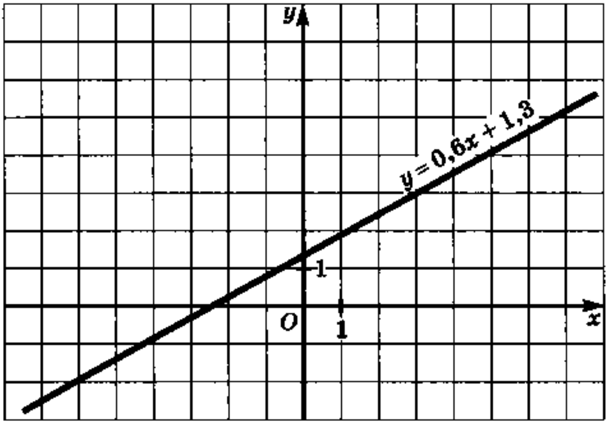


Рис. 30

Можно сказать, что точные значения отличаются от приближенных на модуль разности между ними, так как:

$$|2{,}32 - 2{,}3| = 0{,}02; \quad |3{,}46 - 3{,}5| = 0{,}04.$$

Модуль этой разности называют *абсолютной погрешностью* приближенного значения.

Определение. **Абсолютной погрешностью приближенного значения называется модуль разности точного и приближенного значений.**

В рассмотренном примере абсолютная погрешность приближенного значения 2,3 равна 0,02, а абсолютная погрешность приближенного значения 3,5 равна 0,04.

Приведем другие примеры.

Пример 1. Округлим десятичную дробь 76,2961 до сотых и найдем абсолютную погрешность приближенного значения.

Выполнив округление, получим:

$$76{,}2961 \approx 76{,}30.$$

Найдем абсолютную погрешность:

$$|76{,}2961 - 76{,}30| = 0{,}0039.$$

Значит, абсолютная погрешность приближенного значения 76,30 равна 0,0039.

Пример 2. Округлим десятичную запись числа π до десятых и найдем абсолютную погрешность приближенного значения.

Известно, что π равно 3,1415926536... При округлении до десятых получаем:

$$\pi = 3{,}1415926536... \approx 3{,}1.$$

Вычислим абсолютную погрешность:

$$|\pi - 3{,}1| = 0{,}0415926536...$$

Вместо полученного результата со многими цифрами берут оценку абсолютной погрешности с одной или двумя цифрами, не считая 0 целых и другие нули, предшествующие первой, отличной от нуля цифре. В нашем случае можно взять число 0,05, полученное при округлении абсолютной погрешности до сотых с избытком. Говорят, что $\pi \approx 3{,}1$ *с точностью* до 0,05.

Заметим, что при округлении любой десятичной дроби до десятых получаем приближенное значение с точностью до 0,05, при округлении до сотых — с точностью до 0,005 и т. д. Вообще при округлении десятичной дроби до некоторого разряда получаем приближенное значение с точностью до 5 единиц следующего разряда. Часто используют более грубую оценку. Считают, что при округлении десятичной дроби до некоторого разряда получают приближенное значение с точностью до одной единицы этого разряда. В нашем примере 3,1 есть приближенное значение числа π с точностью до 0,1.

Во многих случаях, так же как и в примере 2, невозможно найти абсолютную погрешность приближенного значения, так как неизвестно точное значение. Примером могут служить результаты, получаемые при измерении длин, промежутков времени, масс и других величин.

Вообще, если $x \approx a$ и $|x - a| \leqslant h$, то a есть приближенное значение x с точностью до h.

Измерив линейкой с миллиметровой шкалой толщину H монеты и ее диаметр D (в сантиметрах), получили:

$$H \approx 0{,}2 \text{ с точностью до } 0{,}1;$$
$$D \approx 2{,}5 \text{ с точностью до } 0{,}1.$$

При измерении толщины монеты абсолютная погрешность может составить половину приближенного значения, тогда как при измерении диаметра она не может быть более 0,04 приближенного значения, так как:

$$0{,}1 : 0{,}2 = 0{,}5; \quad 0{,}1 : 2{,}5 = 0{,}04.$$

Можно сказать, что качество второго измерения значительно выше качества первого. Качество измерения характеризуют *относительной погрешностью*.

Определение. **Относительной погрешностью приближенного значения называется отношение абсолютной погрешности к модулю приближенного значения.**

Для приближенных значений толщины и диаметра монеты невозможно вычислить относительную погрешность, так как в этом случае неизвестна абсолютная погрешность. Однако мы уже оценили сверху относительную погрешность. Для приближенного значения 0,2 она меньше или равна 0,5, а для приближенного значения 2,5 — меньше или равна 0,04. Эту оценку обычно, как и относительную погрешность, выражают в процентах. Так как 0,5 = 50% и 0,04 = 4%, то:

$H \approx 0{,}2$ с относительной точностью до 50%;

$D \approx 2{,}5$ с относительной точностью до 4%.

Пример. Округлим дробь 50,1 до единиц и вычислим относительную погрешность полученного приближенного значения.

При округлении десятичной дроби до единиц получаем:

$$50{,}1 \approx 50.$$

Найдем абсолютную погрешность:

$$|50{,}1 - 50| = 0{,}1.$$

Теперь можно найти относительную погрешность:

$$\frac{0{,}1}{|50|} = 0{,}002 = 0{,}2\%.$$

Значит,

$50{,}1 \approx 50$ с относительной погрешностью 0,2%.

430. Округлите дроби 21,84 и 7,56 сначала до десятых, затем до единиц и найдите абсолютную погрешность каждого приближения.

431. Вычислите абсолютную погрешность приближенного значения, полученного при округлении дроби:

а) 0,385 до десятых; в) 25,62 до единиц;
б) 1,044 до сотых; г) 761,3 до десятков.

432. Представьте число $\frac{100}{3}$ в виде десятичной дроби и округлите дробь до единиц, десятых и сотых. Найдите абсолютную погрешность каждого приближенного значения.

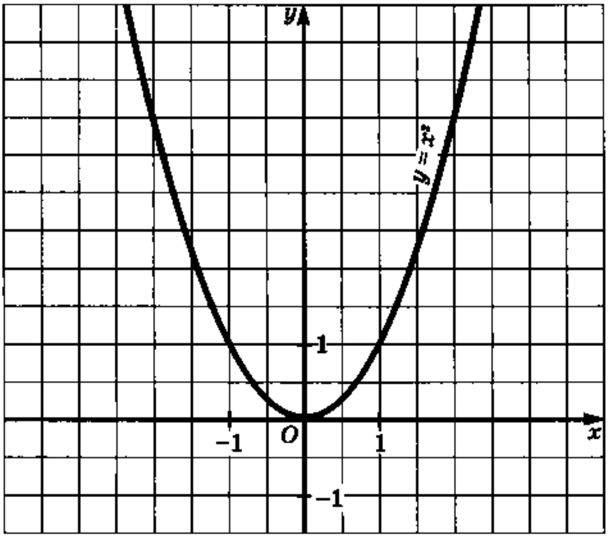


Рис. 31

433. Найдите по графику функции $y = x^2$ (рис. 31) приближенные значения y при $x = 0{,}8$; $1{,}3$; $2{,}5$. Вычислите абсолютную погрешность каждого приближенного значения.

434. Найдите приближенное значение длины каждого отрезка (рис. 32) и укажите его точность.

435. За одну поездку израсходовали бензина более 3 л и менее 4 л. Укажите точность приближенного значения израсходованного бензина, если за приближенное значение принять:

а) 3 л; б) 4 л; в) среднее арифметическое 3 л и 4 л.

436. На митинге присутствовало более 20 тыс. и менее 30 тыс. человек. Какое число является более точным приближенным значением числа людей, присутствовавших на митинге? Укажите точность этого приближенного значения.

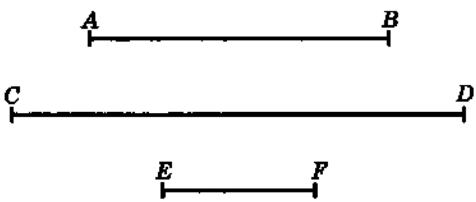


Рис. 32

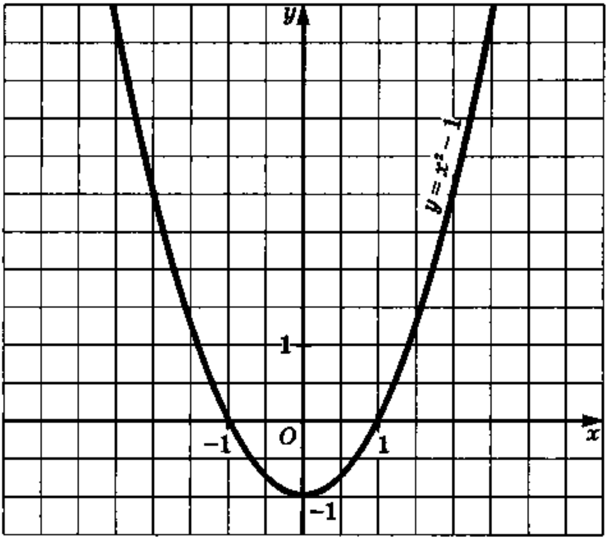


Рис. 33

437. Каждую из десятичных дробей 0,45; 2,53 и 31,98 округлите до десятых и вычислите абсолютную и относительную погрешности приближенных значений.

438. Запишите $2\frac{12}{25}$ в виде десятичной дроби, округлите получившуюся дробь до единиц и до десятых. Вычислите для каждого приближенного значения абсолютную и относительную погрешности.

439. Найдите по графику функции $y = x^2 - 1$ (рис. 33) приближенные значения y при $x = 1{,}8$; $-1{,}5$. Вычислите относительную погрешность каждого из приближенных значений.

440. Рост человека приближенно равен 175 см с точностью до 1 см. Оцените относительную погрешность.

441. Площадь Белого моря приближенно равна 90 тыс. км^2 (с точностью до 500 км^2). Оцените относительную погрешность приближенного значения.

442. Измерили толщину проволоки L и расстояние l от Земли до Луны. Получили результаты: $L \approx 2{,}4$ мм с точностью до 0,1 мм; $l \approx 384\,400$ км с точностью до 50 км. Сравните точности измерений, оценив относительные погрешности.

Упражнения для повторения

443. Представьте каждое из чисел $2\frac{7}{8}$; $-1\frac{3}{5}$; 3,25; $-7,5$ и -6 в виде отношения целого и натурального чисел.

444. Упростите выражение:

а) $\left(\frac{3}{1-x+x^2}+\frac{1}{1+x}-\frac{3}{1+x^3}\right)\left(x-\frac{2x-1}{1+x}\right)$

б) $\left(\frac{1}{x+y}+\frac{y^2}{x^3-xy^2}\right):\frac{x^3+y^3}{x^2-xy}$.

445. Известно, что $a+b-c=\alpha$ и $ab-ac-bc=\beta$. Выразите через α и β выражение $a^2+b^2+c^2$.

Контрольные вопросы и задания

1. Какие числа образуют множество рациональных чисел? Какие числа представляют множество бесконечных десятичных периодических дробей? Как обозначается множество рациональных чисел?

2. Какие числа называются действительными? Как обозначается множество действительных чисел?

3. Какие числа называют иррациональными числами?

4. Какие действительные числа можно представить в виде дроби с целым числителем и натуральным знаменателем?

5. Приведите примеры различных промежутков, запишите их с помощью скобок и изобразите на координатной прямой.

6. Объясните, как заменить выборку интервальным рядом данных.

7. Что называют относительной частотой варианты?

8. Сформулируйте определение абсолютной погрешности приближенного значения.

9. Что означает запись $x \approx a$ с точностью до h?

10. Сформулируйте определение относительной погрешности приближенного значения.

11. Что означает запись $x \approx a$ с относительной точностью до $\alpha\%$?

§ 7. АРИФМЕТИЧЕСКИЙ КВАДРАТНЫЙ КОРЕНЬ. ФУНКЦИЯ $y = \sqrt{x}$

21. Арифметический квадратный корень

Задача. Площадь квадрата равна 729 см². Чему равна сторона квадрата?

Допустим, что сторона квадрата равна x см, тогда его площадь равна x^2 см². По условию задачи площадь квадрата равна 729 см². Значит, $x^2 = 729$.

С помощью таблицы квадратов двузначных чисел найдем, что одним из корней уравнения $x^2 = 729$ является число 27. Очевидно, что другим его корнем служит противоположное число, т. е. число -27.

Условию задачи соответствует только положительный корень. Итак, сторона квадрата равна 27 см.

Решая задачу, мы составили уравнение вида $x^2 = a$, где a — некоторое число. Выясним, сколько корней имеет уравнение такого вида в зависимости от значения a.

Если $a < 0$, то уравнение $x^2 = a$ не имеет корней, так как квадрат любого числа является неотрицательным числом.

Если $a = 0$, то уравнение $x^2 = a$ имеет единственный корень — число 0.

Если $a > 0$, то уравнение $x^2 = a$ имеет два корня. Чтобы убедиться в этом, воспользуемся графиком функции $y = x^2$ (рис. 34).

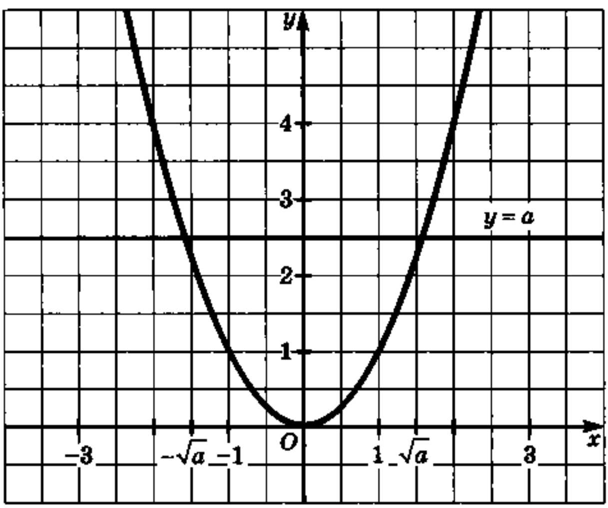


Рис. 34

При $a > 0$ прямая $y = a$ пересекает параболу в двух точках, симметричных относительно оси y. Обозначим абсциссы точек пересечения x_1 и x_2. Тогда $x_1^2 = a$ и $x_2^2 = a$, т. е. числа x_1 и x_2 являются корнями уравнения, причем $x_1 = -x_2$.

Корень уравнения $x^2 = a$ называют *квадратным корнем из a*. Например, каждое из чисел 27 и −27 является квадратным корнем из 729.

Вообще, **квадратным корнем из числа a называют число, квадрат которого равен a.**

Неотрицательный квадратный корень из числа получил специальное название — *арифметический квадратный корень*.

Определение. **Арифметическим квадратным корнем из числа a называется неотрицательное число, квадрат которого равен a.**

Для арифметического квадратного корня из a принято обозначение: $\sqrt{a}$. Знак $\sqrt{}$ называют *знаком арифметического квадратного корня* или *знаком радикала* (от лат. *radix* — корень), а выражение, записанное под знаком корня, — подкоренным выражением. Запись $\sqrt{a}$ читают так: «арифметический квадратный корень из a». Иногда для краткости слово «арифметический» при чтении опускают. Знак радикала, похожий на современный, появился у нидерландского математика Альберта Жирара в 1626 г., а современное обозначение арифметического квадратного корня впервые встречается в работе Рене Декарта «Рассуждение о методе» в 1637 г.

Мы показали, что если $a \geqslant 0$, то уравнение $x^2 = a$ имеет неотрицательный корень, т. е. при любом $a \geqslant 0$ существует неотрицательное число, квадрат которого равен a. Иначе говоря, ***при любом $a \geqslant 0$ выражение $\sqrt{a}$ имеет смысл. Если $a < 0$, то выражение $\sqrt{a}$ не имеет смысла.***

Приведем примеры нахождения значения арифметического квадратного корня или, как говорят иначе, *извлечения* арифметического квадратного корня из числа:

$\sqrt{81} = 9$, так как 9 — неотрицательное число и $9^2 = 81$,

$\sqrt{0{,}0144} = 0{,}12$, так как 0,12 — неотрицательное число и

$0{,}12^2 = 0{,}0144$.

$\sqrt{0} = 0$, так как 0 — неотрицательное число и $0^2 = 0$.

В рассмотренных примерах значение выражения $\sqrt{a}$ является рациональным числом. Однако значение этого выражения может быть иррациональным числом. Например, раньше было показано, что не существует рационального числа, квадрат которого равен 2. Значит, $\sqrt{2}$ — иррациональное число. Иррациональными числами являются также значения выражений $\sqrt{5}$, $\sqrt{3}$, $-\sqrt{6{,}2}$, $2\sqrt{2}$, $\sqrt{7} + \sqrt{2}$ и т. п.

Можно доказать, что если натуральное число a не является квадратом какого-либо натурального числа, то $\sqrt{a}$ — иррациональное число.

Из определения арифметического корня следует, что ***если выражение $\sqrt{a}$ имеет смысл, то $\sqrt{a} \geqslant 0$ и $(\sqrt{a})^2 = a$.***

Найдем, например, значение выражения $-0{,}5(\sqrt{13})^2$. Так как $(\sqrt{13})^2 = 13$, то $-0{,}5(\sqrt{13})^2 = -0{,}5 \cdot 13 = -6{,}5$.

446. Постройте график функции $y = x^2$ и с его помощью решите уравнение:

а) $x^2 = 1$; б) $x^2 = 3$; в) $x^2 = 4$; г) $x^2 = -1$.

447. Решите уравнение:

а) $0{,}3x^2 = 1{,}2$; б) $-0{,}2x^2 = 1{,}8$; в) $0{,}7x^2 = 0$.

448. Верно ли, что:

а) $\sqrt{36} = 6$; в) $\sqrt{4{,}9} = 0{,}7$;

б) $\sqrt{5\frac{4}{9}} = 2\frac{1}{3}$; г) $\sqrt{0{,}01} = -0{,}1$?

449. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{6400}$; г) $-\sqrt{0{,}0001}$; ж) $-\frac{1}{15}\sqrt{0{,}09}$;

б) $\sqrt{0{,}25}$; д) $0{,}7\sqrt{0{,}81}$; з) $\frac{5}{22}\sqrt{1{,}21}$;

в) $\sqrt{1\frac{7}{9}}$; е) $\frac{1}{12}\sqrt{3600}$; и) $-1{,}2\sqrt{\frac{49}{144}}$.

450. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{a} - \sqrt{b}$, если $a = 1$, $b = 0{,}64$;

б) $\sqrt{a-b}$, если $a = 1$, $b = 0{,}64$;

в) $2\sqrt{a+4b}$, если $a = 0{,}12$, $b = 0{,}01$;

г) $-\sqrt{3a-b}$, если $a = 0{,}6$, $b = 0{,}8$;

д) $\sqrt{a+\sqrt{b}}$, если $a = 0{,}7$, $b = 0{,}09$;

е) $-\sqrt{a-\sqrt{b}}$, если $a = 4{,}8$, $b = 0{,}64$.

451. Пользуясь таблицей квадратов двузначных чисел, найдите:

а) $\sqrt{256}$; г) $-\sqrt{2916}$; ж) $\sqrt{\sqrt{6561}}$;

б) $\sqrt{1369}$; д) $0{,}5\sqrt{4356}$; з) $-\sqrt{\sqrt{2401}}$;

в) $\sqrt{4761}$; е) $\frac{1}{3}\sqrt{5625}$; и) $-\sqrt{2+\sqrt{9604}}$.

452. Верно ли, что:

а) $\sqrt{2{,}89} = 1{,}7$; г) $\sqrt{0{,}64} > 0{,}7$;

б) $-\sqrt{2\frac{1}{4}} = -1{,}5$; д) $-\sqrt{0{,}36} < -0{,}7$;

в) $\sqrt{0{,}09} = -0{,}3$; е) $-\sqrt{0{,}04} < -0{,}1$?

453. Докажите, что иррациональным является число:

а) $\sqrt{5}$; б) $\sqrt{3}$; в) $\sqrt{3} - 1$; г) $\sqrt{5} + 1$.

454. Укажите три каких-либо значения b, при которых значение выражения $\sqrt{3b-1}$ является:

а) рациональным числом;

б) иррациональным числом.

455. Найдите значение выражения:

а) $(\sqrt{7})^2$; в) $-(\sqrt{11})^2$; д) $-0{,}3(\sqrt{2{,}7})^2$;

б) $(\sqrt{0{,}8})^2$; г) $-(\sqrt{3{,}6})^2$; е) $(-0{,}2\sqrt{0{,}6})^2$.

456. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{3^2 + 4^2 - 5^2} + \sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^2 + \sqrt{1\frac{24}{25}}} - \sqrt{(-1)^2}$;

б) $\sqrt{13^2 - 12^2 - 5^2} + \sqrt{\sqrt{1\frac{9}{16}} + \sqrt{(-1)^2}} - \left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2$.

457. Имеет ли смысл выражение:

а) $\sqrt{-36}$; в) $\sqrt{(-0{,}1)^2}$; д) $\sqrt{(-0{,}4)^{2n}}$, где $n \in N$;

б) $-\sqrt{36}$; г) $\sqrt{(-1)^7}$; е) $\sqrt{(-1{,}6)^{2n+3}}$, где $n \in N$?

458. При каких значениях a имеет смысл выражение:

а) $\sqrt{(-a)^2}$; в) $\sqrt{(a-4)^2}$; д) $\sqrt{4a^2+4a+11}$;

б) $\sqrt{-a^2}$; г) $\sqrt{a^2+6}$; е) $\sqrt{-9a^2+6a-1}$?

459. Сократите дробь:

а) $\frac{3}{\sqrt{3}}$; в) $\frac{12}{\sqrt{6}}$; д) $\frac{12}{5\sqrt{6}}$;

б) $\frac{5}{2\sqrt{5}}$; г) $\frac{21}{\sqrt{7}}$; е) $-\frac{35}{2\sqrt{7}}$.

460. Разложите на множители:

а) $7-\sqrt{7}$; б) $62-\sqrt{31}$; в) a^2-10; г) $19-64b^2$.

461. Сократите дробь:

а) $\frac{a^2-2}{a-\sqrt{2}}$; в) $\frac{\sqrt{3}+3}{\sqrt{3}}$; д) $\frac{a^2+2a\sqrt{3}+3}{a+\sqrt{3}}$;

б) $\frac{x^2-7}{x+\sqrt{7}}$; г) $\frac{5-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$; е) $\frac{4b^2-4b\sqrt{5}+5}{\sqrt{5}-2b}$.

462. Докажите, что если $a > 1$, то $\sqrt{a+\frac{a}{a^2-1}} = a\sqrt{\frac{a}{a^2-1}}$.

Из данных выражений

$\sqrt{3\frac{3}{8}}$, $\sqrt{4\frac{4}{15}}$, $\sqrt{5\frac{5}{26}}$, $\sqrt{6\frac{6}{35}}$, $\sqrt{7\frac{7}{50}}$, $\sqrt{8\frac{8}{23}}$

выберите те, которые можно преобразовать, используя это тождество, и выполните преобразование.

463. Решите уравнение:

а) $\sqrt{x}=3$; б) $3\sqrt{x}=1{,}5$; в) $\sqrt{x}-16=0$; г) $0{,}1\sqrt{x}+9=0$.

464. Решите уравнение:

а) $\sqrt{x-3}=2{,}5$; в) $\sqrt{x-4}-0{,}6=0$;

б) $\sqrt{2+x}=-1{,}7$; г) $3\sqrt{6+x}+0{,}9=0$.

465. Найдите корни уравнения или докажите, что их нет:

а) $\sqrt{3+\sqrt{x}}=2$; в) $\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{x}}}=2$;

б) $\sqrt{5-\sqrt{x}}=1$; г) $\sqrt{2+\sqrt{5-\sqrt{x}}}=2$.

466. Решите уравнение, разложив левую часть на множители:

а) $x-2\cdot\sqrt{x}=0$; в) $x-2-\sqrt{x-2}=0$;

б) $2x-\sqrt{x}=0$; г) $2x+2-\sqrt{x+1}=0$.

467. Зная, что переменные принимают только положительные значения, выразите из формулы:

а) $d=4{,}1\sqrt{h}$ переменную h;

б) $t=\sqrt{\dfrac{2s}{a}}$ переменную a;

в) $v=0{,}6\sqrt{2gh}$ переменную h;

г) $T=2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$ переменную l.

Упражнения для повторения

468. Докажите, что при $a>10$ выражение $a-\dfrac{16}{a-5}\cdot\dfrac{25-a^2}{a-10}$ принимает положительные значения.

469. Сократите дробь:

а) $\dfrac{36-b^2}{5b^2+60b+180}$; б) $\dfrac{3a^5-3a^3}{2a-a^2-1}$; в) $\dfrac{a^2+4b^2+2ab}{56b^3-7a^3}$.

470. Докажите, что множество натуральных степеней числа 3 замкнуто относительно умножения и не замкнуто относительно сложения.

22. Вычисление и оценка значений квадратных корней

Рассмотрим один из приемов нахождения приближенных значений арифметического квадратного корня. Этот прием основан на следующей теореме.

Теорема. *Если $a > b > 0$, то $\sqrt{a} > \sqrt{b}$.*

Доказательство. Так как по условию $a > b$, то $a - b > 0$. Поскольку $a > 0$ и $b > 0$, то $a = \left(\sqrt{a}\right)^2$ и $b = \left(\sqrt{b}\right)^2$. Следовательно, $a - b = \left(\sqrt{a}\right)^2 - \left(\sqrt{b}\right)^2 = \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)$. Поскольку $a - b > 0$, то $\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right) > 0$. По определению арифметического квадратного корня и учитывая, что $a > 0$ и $b > 0$, будем иметь $\sqrt{a} > 0$ и $\sqrt{b} > 0$. Тогда $\sqrt{a} + \sqrt{b} > 0$. Но произведение двух множителей положительно, если множители имеют одинаковый знак, т. е. если $\sqrt{a} + \sqrt{b} > 0$, то и $\sqrt{a} - \sqrt{b} > 0$. И тогда $\sqrt{a} > \sqrt{b}$, что и требовалось доказать.

Используя доказанную теорему, можно вычислять приближенные значения корня с одним, двумя, тремя и т. д. знаками после запятой. Покажем это на примере $\sqrt{2}$.

Найдем сначала два последовательных натуральных числа, между которыми заключен $\sqrt{2}$. Так как

$$1^2 < 2 < 2^2,$$

то

$$1 < \sqrt{2} < 2.$$

Числа 1 и 2 — приближенные значения $\sqrt{2}$ с точностью до 1, первое — с недостатком, а второе — с избытком.

Будем теперь последовательно возводить в квадрат числа 1,1; 1,2; 1,3; ..., 1,9, пока не получим число, большее 2:

$$1{,}1^2 = 1{,}21;\ 1{,}2^2 = 1{,}44;\ 1{,}3^2 = 1{,}69;\ 1{,}4^2 = 1{,}96;\ 1{,}5^2 = 2{,}25.$$

Значит,

$$1{,}4^2 < 2 < 1{,}5^2,$$

т. е.

$$1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5.$$

Числа 1,4 и 1,5 — приближенные значения $\sqrt{2}$ с точностью до 0,1, соответственно с недостатком и с избытком.

Далее будем возводить в квадрат числа 1,41; 1,42; 1,43; ...; 1,49, пока не встретится число, большее 2.

Выполняя вычисления, найдем, что

$$1{,}41^2 = 1{,}9881 \text{ и } 1{,}42^2 = 2{,}0164,$$

т. е.

$$1{,}41^2 < 2 < 1{,}42^2.$$

Отсюда

$$1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42.$$

Мы нашли, что приближенными значениями $\sqrt{2}$ с точностью до 0,01 являются числа 1,41 (с недостатком) и 1,42 (с избытком).

Возводя последовательно в квадрат числа 1,411; 1,412; 1,413; ...; 1,419, найдем, что

$$1{,}414^2 = 1{,}999396; \ 1{,}415^2 = 2{,}002225,$$

т. е.

$$1{,}414^2 < 2 < 1{,}415^2.$$

Отсюда

$$1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415.$$

Мы нашли приближенные значения $\sqrt{2}$ с точностью до 0,001 — это числа 1,414 (с недостатком) и 1,415 (с избытком).

Продолжая тот же процесс, найдем, что

$$1{,}4142 < \sqrt{2} < 1{,}4143,$$

$$1{,}41421 < \sqrt{2} < 1{,}41422$$

и т. д.

Рассматривая последнее двойное неравенство, можно сказать, что бесконечная десятичная дробь, представляющая собой число $\sqrt{2}$, начинается так: 1,41421... , т. е.

$$\sqrt{2} = 1{,}41421\ldots .$$

Для нахождения приближенного значения арифметического квадратного корня с заданной точностью используют и другие приемы, однако все они являются достаточно трудоемкими.

В практических расчетах для нахождения приближенного значения арифметического квадратного корня применяют специальные таблицы или калькулятор.

Для извлечения квадратного корня с помощью калькулятора используется специальная клавиша, отмеченная знаком $\boxed{\sqrt{\ }}$.

Чтобы извлечь квадратный корень из положительного числа a, надо ввести в калькулятор число a, а затем нажать клавишу $\boxed{\sqrt{}}$. Тогда на экране высветится ответ.

Найдем, например, с помощью калькулятора $\sqrt{17{,}2}$ с точностью до 0,0001. Для этого введем в калькулятор число 17,2 и нажмем клавишу $\boxed{\sqrt{}}$. На экране высветится число 4,1472882. Округлив результат до четырех десятичных знаков, получим, что

$$\sqrt{17{,}2} \approx 4{,}1473.$$

При нахождении с помощью калькулятора значения выражения, содержащего квадратные корни, используют в случае необходимости память калькулятора, а при ее отсутствии записывают промежуточные результаты, чтобы использовать их в дальнейшем.

471. Сравните числа:

а) $\sqrt{1{,}5}$ и $\sqrt{1\frac{1}{3}}$; в) 5,8 и $\sqrt{34}$; д) 0,72 и $\sqrt{0{,}5}$;

б) $\sqrt{6{,}2}$ и $\sqrt{6\frac{2}{7}}$; г) $-\sqrt{17}$ и -4; е) $-\sqrt{0{,}7}$ и $-0{,}8$.

472. Расположите в порядке возрастания числа:

$$6;\quad \sqrt{35};\quad \sqrt{47};\quad -1{,}7;\quad -\sqrt{3};\quad 0.$$

473. Расположите в порядке убывания числа:

$$-\sqrt{2{,}3};\quad \sqrt{5\frac{1}{6}};\quad 0;\quad \sqrt{5{,}3};\quad -\sqrt{2\frac{1}{3}};\quad -1{,}5.$$

474. Верно ли, что:

а) $3 < \sqrt{10} < 4$; б) $1{,}1 < \sqrt{1{,}56} < 1{,}2$?

475. С помощью таблицы квадратов двузначных чисел найдите два последовательных натуральных числа, между которыми заключено число:

а) $\sqrt{115}$; в) $\sqrt{2003}$; д) $\sqrt{6143}$;

б) $\sqrt{501}$; г) $\sqrt{3015}$; е) $\sqrt{9005}$.

476. Подберите два последовательных натуральных числа, между которыми заключено число:

а) $\sqrt{5}$; б) $\sqrt{8{,}6}$; в) $\sqrt{50{,}2}$; г) $\sqrt{132{,}4}$.

477. Найдите цифры единиц, десятых и сотых в десятичной записи числа: а) $\sqrt{3}$; б) $\sqrt{5}$.

478. С помощью калькулятора найдите значение выражения (ответ округлите до тысячных):

а) $\sqrt{a}$, если $a = 2{,}6$; $36{,}01$; 415;

б) $\sqrt{3a}$, если $a = 8{,}2$; $136{,}4$; $0{,}444$.

479. С помощью калькулятора найдите с точностью до 0,1 см сторону квадрата, площадь которого равна:

а) 15 см^2; б) 42 см^2; в) 60,5 см^2; г) 216,5 см^2.

480. Вычислите с помощью калькулятора значение выражения (ответ округлите до сотых):

а) $\sqrt{\sqrt{3{,}1}}$; б) $\sqrt{4{,}1\sqrt{3{,}07}}$; в) $\sqrt{6{,}75+\sqrt{17{,}63}}$.

481. Найдите с помощью калькулятора значение выражения (ответ округлите до сотых):

а) $\sqrt{a^2+b^2}$, если $a = 17{,}6$; $b = 36{,}34$;

б) $\sqrt{a^2+b^2}$, если $a = 8{,}24$; $b = 44{,}11$.

482. Свободно падающее в безвоздушном пространстве тело проходит s м за t с, где $t=\sqrt{\dfrac{2s}{g}}$, $g \approx 10$ м/с^2. Пользуясь калькулятором, вычислите t с точностью до 0,01, если s равно:

а) 165; б) 208.

483. Время t (в секундах) полного колебания маятника вычисляется по формуле $t=2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$, где l — длина маятника (в сантиметрах), $g \approx 10$ м/с^2, $\pi \approx 3{,}14$. Найдите с помощью калькулятора t с точностью до 0,1, если l равно: а) 78; б) 116.

Упражнения для повторения

484. Упростите выражение:

$$\left(1+\frac{3x+1}{5x-1}\cdot\frac{5x^2-x}{6x^2-3xy-y+2x}+\frac{6x^2-2y^2+xy}{y^2-4x^2}\right)\cdot\frac{2x^2-xy}{y}.$$

485. Постройте график функции $y = x^2$, где $x \geqslant 0$. Найдите:

а) значение функции, соответствующее значению аргумента, равному 0,5; 1,5; 2,5;

б) множество значений аргумента, при которых значение функции меньше 4, но больше 1.

486. Упростите выражение:

а) $\frac{a^3 \cdot (-a^3)^4}{a^{11}}$; б) $\frac{a^4 \cdot (-a^5)^2}{a^9}$; в) $\frac{24a^2b \cdot (0,5ab^2)^3}{3a^4b^5}$.

23. Функция $y = \sqrt{x}$ и ее график

Выражение $\sqrt{x}$ имеет смысл при любом неотрицательном значении x, причем любому неотрицательному действительному числу соответствует единственное значение этого выражения. Значит, формула $y = \sqrt{x}$ задает функцию, областью определения которой является множество всех неотрицательных действительных чисел, т. е. $D(y) = [0; +\infty)$.

Рассмотрим свойства функции $y = \sqrt{x}$ и особенности ее графика.

1. ***Если $x = 0$, то $y = 0$, если $x > 0$, то $y > 0$, т. е. на всей области определения функция принимает неотрицательные значения.***

Это свойство непосредственно следует из определения арифметического квадратного корня. Геометрически оно означает, что график функции проходит через начало координат и расположен в первой координатной четверти.

2. ***Большему значению аргумента соответствует большее значение функции.***

Пусть x_1 и x_2 — произвольные значения аргумента, причем $x_2 > x_1$. Обозначим через y_1 и y_2 соответствующие значения функции. Тогда по теореме, доказанной в предыдущем пункте, из условия $x_2 > x_1 \geqslant 0$ следует, что $\sqrt{x_2} > \sqrt{x_1}$. Значит, $y_2 > y_1$.

3. ***Областью значений функции является множество всех неотрицательных действительных чисел, т. е. $E(y) = [0; +\infty)$.***

В самом деле, из определения арифметического квадратного корня следует, что любое значение функции $y = \sqrt{x}$ является неотрицательным действительным числом. Покажем теперь, что любое неотрицательное действительное число m является значением функции. Из равенства $\sqrt{x} = m$, где $m \geqslant 0$, следует, что $x = m^2$. Значит, при $x = m^2$ функция $y = \sqrt{x}$ принимает значение, равное m, где $m \geqslant 0$, т. е. число m принадлежит области значений функции. Таким образом, областью значений функции является множество всех неотрицательных действительных чисел.

Геометрически это означает, что любая прямая $y = m$, где $m \geqslant 0$, пересекает график, причем только в одной точке.

Построим график функции $y = \sqrt{x}$. Для этого составим таблицу значений функции (с точностью до 0,1), используя при необходимости калькулятор:

x	0	0,5	1	1,5	2	3	4	5	6	7	8	9
y	0	0,7	1	1,2	1,4	1,7	2	2,2	2,4	2,6	2,8	3

Отметим в координатной плоскости точки, координаты которых занесены в таблицу. Проведя через эти точки плавную линию, получим график функции $y = \sqrt{x}$ (рис. 35).

Выясним, каково взаимное расположение графиков функций $y = \sqrt{x}$ и $y = x^2$, где $x \geqslant 0$. Если a и b — неотрицательные действительные числа и $b = \sqrt{a}$, то $b^2 = a$. Это означает, что если точка с координатами $(a; b)$ принадлежит графику функции $y = \sqrt{x}$, то точка с координатами $(b; a)$ принадлежит графику

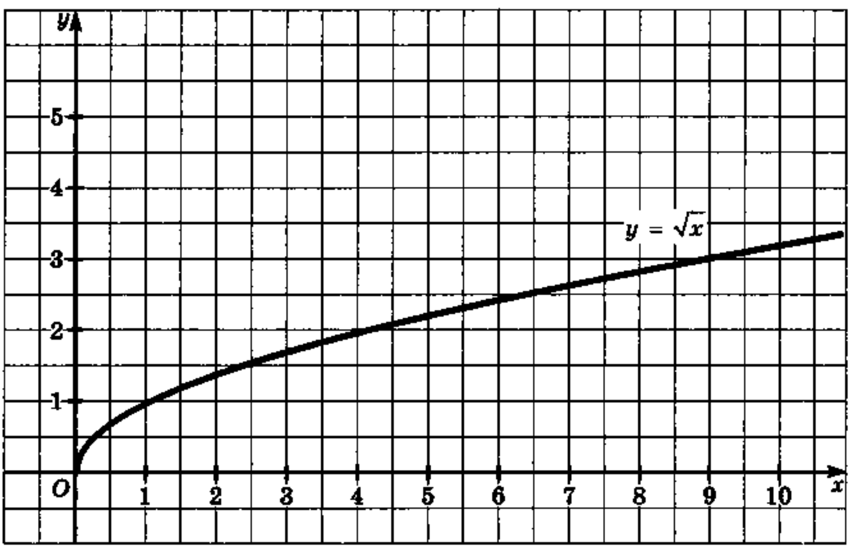


Рис. 35

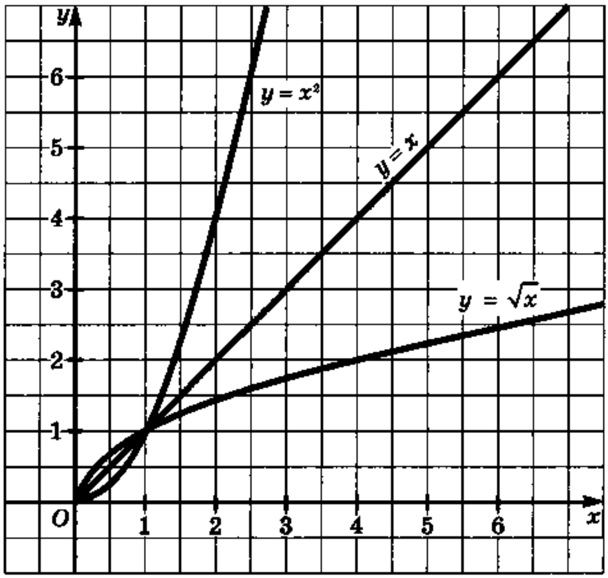


Рис. 36

функции $y = x^2$, где $x \geqslant 0$. Верно и обратное: если точка $(b; a)$, где $b \geqslant 0$, $a \geqslant 0$ принадлежит графику функции $y = x^2$, где $x \geqslant 0$, то точка $(a; b)$ принадлежит графику функции $y = \sqrt{x}$.

Так как точки с координатами $(a; b)$ и $(b; a)$ симметричны относительно прямой $y = x$, то отсюда вытекает, что каждой точке графика функции $y = \sqrt{x}$ соответствует симметричная ей относительно прямой $y = x$ точка графика функции $y = x^2$, где $x \geqslant 0$, и наоборот: каждой точке графика $y = x^2$, где $x \geqslant 0$, соответствует точка графика функции $y = \sqrt{x}$, симметричная ей относительно прямой $y = x$. Отсюда следует, что графики функций $y = \sqrt{x}$ и $y = x^2$, где $x \geqslant 0$, симметричны относительно прямой $y = x$ (рис. 36).

Таким образом, график функции $y = \sqrt{x}$ — «лежачая» полупарабола, расположенная в первой координатной четверти и симметричная относительно прямой $y = x$ полупараболе, которая является графиком функции $y = x^2$, где $x \geqslant 0$.

487. Пользуясь графиком функции $y = \sqrt{x}$, найдите:

а) значение функции при x, равном 1,5; 6,5; 7,5;

б) при каком значении аргумента значение функции равно 1,5; 2; 2,5.

488. Пользуясь графиком функции $y = \sqrt{x}$, найдите:

а) значение $\sqrt{x}$, если $x = 2; 6; 8$;

б) значение x, при котором $\sqrt{x} = 0{,}8; 1{,}7; 2{,}6$.

489. Функция задана формулой $y = \sqrt{x}$. С помощью калькулятора найдите с точностью до 0,01:

а) значение y при $x = 12{,}6; 104{,}8; 1286{,}5$;

б) значение x, при котором $y = 6{,}83; 26{,}45; 78{,}11$.

490. Пользуясь таблицей значений функции $y = \sqrt{x}$, составленной для построения ее графика, найдите с точностью до 0,1 приращение, которое функция получает при возрастании x:

а) от 1 до 3; б) от 3 до 5; в) от 5 до 7.

Сравните результаты.

491. С помощью калькулятора найдите с точностью до 0,01 приращение, которое функция $y = \sqrt{x}$ получает при возрастании x:

а) от 10 до 20; б) от 1200 до 1210.

Сравните результаты.

492. Из данных точек

$$A(-36; 6),\ B(0{,}81; 0{,}9),\ C(1{,}96; 1{,}4),$$
$$D(1{,}21; 1{,}1),\ E(0{,}0625; 0{,}25)$$

выберите те, которые принадлежат графику функции $y = \sqrt{x}$.

493. Пересекает ли график функции $y = \sqrt{x}$ прямая:

а) $x = 36$; б) $x = 100$; в) $y = 36$; г) $y = 100$; д) $y = -16$?

При положительном ответе укажите координаты точки пересечения.

494. Найдите координаты точки пересечения графика функции $y = \sqrt{x}$ и прямой:

а) $x = 4$; б) $x = 0{,}81$; в) $y = 4$; г) $y = 0{,}81$.

495. Пересекаются ли графики функций:

а) $y = \sqrt{x}$ и $y = -x - 8$; б) $y = \sqrt{x}$ и $y = x$?

496. Изобразите схематически график функции:

а) $y = -\sqrt{x}$; б) $y = \sqrt{-x}$; в) $y = \sqrt{|x|}$.

497. Докажите, что графики функций $y = \sqrt{x}$ и $y = x + 0{,}5$ не имеют общих точек.

Упражнения для повторения

498. Найдите значение выражения:

а) $3\sqrt{1{,}44} - (-0{,}3\sqrt{7})^2$;

б) $(-2\sqrt{1{,}8})^2 - 4(-\sqrt{0{,}81})^2$.

499. Известно, что m — рациональное число, не равное 0. Является ли рациональным или иррациональным число:

а) $7m^2 + 4$; б) $m^3 - \sqrt{5}$; в) $\frac{m^4 - m^2 + 5}{m}$; г) $\frac{m^6 + \sqrt{7}}{m}$?

Контрольные вопросы и задания

1. Сформулируйте определение арифметического квадратного корня. Имеет ли смысл выражение $\sqrt{(-4)^2}$, $-\sqrt{4^2}$, $\sqrt{-4}$?

2. Объясните на примере числа $\sqrt{3}$, как можно найти первые три цифры в десятичной записи этого числа.

3. Укажите область определения функции $y = \sqrt{x}$ и сформулируйте ее свойства. Какие особенности графика этой функции вытекают из указанных свойств?

4. Каково взаимное расположение в координатной плоскости графиков функций $y = \sqrt{x}$ и $y = x^2$, где $x \geqslant 0$?

§ 8. СВОЙСТВА АРИФМЕТИЧЕСКОГО КВАДРАТНОГО КОРНЯ

24. Квадратный корень из произведения, дроби и степени

Нетрудно проверить, что каждое из равенств

$$\sqrt{4 \cdot 25} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{25},\quad \sqrt{\frac{36}{49}} = \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{49}},\quad \sqrt{3^4} = 3^2$$

является верным.

Докажем теоремы, выражающие соответствующие свойства арифметического квадратного корня (в формулировках теорем для краткости вместо «арифметический квадратный корень» будем просто говорить «квадратный корень»).

Теорема 1. ***Квадратный корень из произведения неотрицательных множителей равен произведению квадратных корней из этих множителей, т. е.***

$$\textit{если } a \geqslant 0, b \geqslant 0, \textit{ то } \sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}.$$

Доказательство. При $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ выражение $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ имеет смысл и принимает неотрицательные значения. При этом

$$\left(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}\right)^2 = \left(\sqrt{a}\right)^2 \cdot \left(\sqrt{b}\right)^2 = ab.$$

Значит, по определению арифметического квадратного корня, если $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, то

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}.$$

Доказанная теорема распространяется на случай, когда рассматривается корень из произведения трех и более множителей.

Теорема 2. ***Квадратный корень из дроби с неотрицательным числителем и положительным знаменателем равен частному от деления квадратного корня из числителя на квадратный корень из знаменателя, т. е.***

$$\textit{если } a \geqslant 0,\ b > 0, \textit{ то } \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

Доказательство. Если $a \geqslant 0$, $b > 0$, то выражение $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ имеет смысл и неотрицательно. Покажем, что квадрат этого выражения равен $\frac{a}{b}$. Действительно,

$$\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \frac{\left(\sqrt{a}\right)^2}{\left(\sqrt{b}\right)^2} = \frac{a}{b}.$$

Значит, по определению арифметического квадратного корня

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}},$$

что и требовалось доказать.

Тождества, выражающие свойства квадратного корня из произведения и дроби, часто используют в вычислениях и преобразованиях, поменяв в них местами левую и правую части:

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab} \text{ при } a \geqslant 0,\ b \geqslant 0,$$

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} \text{ при } a \geqslant 0,\ b > 0.$$

Теорема 3. ***При любом значении a и натуральном k верно равенство***

$$\sqrt{a^{2k}} = \left|a^k\right|.$$

Доказательство. Начнем со случая, когда $k = 1$, т. е. докажем сначала, что

$$\sqrt{a^2} = |a|.$$

Если $a \geqslant 0$, то по определению квадратного корня $\sqrt{a^2} = a$ и по определению модуля $|a| = a$. Если $a < 0$, то по определению арифметического квадратного корня $\sqrt{a^2} = -a$ и по определению модуля $|a| = -a$. Значит, в любом случае верно равенство $\sqrt{a^2} = |a|$.

Применив теперь доказанное тождество к выражению $\sqrt{a^{2k}}$, где $k \in N$, получим:

$$\sqrt{a^{2k}} = \sqrt{(a^k)^2} = |a^k|,$$

что и требовалось доказать.

Пример 1. Вычислим значение выражения:

а) $\sqrt{128 \cdot 18}$; б) $\sqrt{\dfrac{4{,}9}{8{,}1}}$; в) $\sqrt{(-2)^{10}}$; г) $\sqrt{21\,609}$.

Воспользуемся доказанными теоремами.

а) Применим теорему о корне из произведения:

$$\sqrt{128 \cdot 18} = \sqrt{64 \cdot 2 \cdot 9 \cdot 2} = \sqrt{64 \cdot 9 \cdot 4} = 8 \cdot 3 \cdot 2 = 48.$$

б) Применив теорему о корне из дроби, получим:

$$\sqrt{\frac{4{,}9}{8{,}1}} = \sqrt{\frac{49}{81}} = \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{81}} = \frac{7}{9}.$$

в) По теореме о корне из степени имеем:

$$\sqrt{(-2)^{10}} = |(-2)^5| = 2^5 = 32.$$

г) Представим подкоренное выражение в виде произведения степеней простых множителей и применим теоремы о корне из произведения и степени:

$$\sqrt{21\,609} = \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{7^4} = 3 \cdot 7^2 = 147.$$

Заметим, что значение корня можно найти иначе, выделив в подкоренном выражении множитель 9 и используя таблицу квадратов двузначных чисел.

Пример 2. Упростим выражение:
а) $\sqrt{a^{10}}$ при $a < 0$; б) $\sqrt{16x^8y^6}$ при $x > 0$, $y < 0$.

Применим доказанные теоремы.
а) По теореме о корне из степени имеем:

$$\sqrt{a^{10}} = |a^5|.$$

Так как $a < 0$, то $a^5 < 0$ и, значит, $|a^5| = -a^5$.
Получаем, что при $a < 0$

$$\sqrt{a^{10}} = |a^5| = -a^5.$$

б) Применяя теоремы о корне из произведения и степени, получим:

$$\sqrt{16x^8y^6} = 4|x^4| \cdot |y^3|.$$

Так как $|x^4| = x^4$ при любом x и $|y^3| = -y^3$ при $y < 0$, то

$$\sqrt{16x^8y^6} = 4|x^4| \cdot |y^3| = -4x^4y^3.$$

Пример 3. Докажем, что число $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ — иррациональное.

Допустим, что $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}=m$, где m — рациональное число. Тогда

$$\sqrt{2}+\sqrt{3} = m - \sqrt{5},$$

$$\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2 = \left(m-\sqrt{5}\right)^2,$$

$$2+2\sqrt{6}+3 = m^2-2m\sqrt{5}+5,$$

$$2\sqrt{6}+2m\sqrt{5} = m^2,$$

$$\left(2\sqrt{6}+2m\sqrt{5}\right)^2 = m^4,$$

$$24+8m\sqrt{30}+20m^2 = m^4.$$

Так как $m \neq 0$, то отсюда

$$\sqrt{30} = \frac{m^4-20m^2-24}{8m}.$$

Получаем, что иррациональное число равно рациональному числу. Полученное противоречие показывает, что предположение неверно и, значит, число m — иррациональное.

500. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{0{,}0001\cdot16}$; б) $\sqrt{0{,}0049\cdot8100}$; в) $\sqrt{0{,}64\cdot144}$.

501. Вычислите значение корня:

а) $\sqrt{\frac{1{,}44}{3{,}61}}$; в) $\sqrt{1\frac{13}{36}\cdot3\frac{13}{36}}$; д) $\sqrt{\frac{1}{9}\cdot0{,}04\cdot64}$;

б) $\sqrt{11\frac{1}{9}}$; г) $\sqrt{\frac{1}{144}\cdot2\frac{2}{49}}$; е) $\sqrt{1\frac{9}{16}\cdot2\frac{1}{4}\cdot2\frac{7}{9}}$.

502. Пользуясь таблицей квадратов двузначных чисел, найдите значение выражения:

а) $\sqrt{19\,600}$; г) $\sqrt{46{,}24}$; ж) $\sqrt{2{,}89\cdot81}$;

б) $\sqrt{280\,900}$; д) $\sqrt{0{,}1444}$; з) $\sqrt{0{,}04\cdot98{,}01}$;

в) $\sqrt{\frac{81}{529}}$; е) $\sqrt{\frac{729}{7921}}$; и) $\sqrt{\frac{1{,}44}{47{,}61}}$.

503. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{50\cdot98}$; в) $\sqrt{2{,}5\cdot12{,}1}$; д) $\sqrt{3{,}2\cdot7{,}2\cdot49}$;

б) $\sqrt{32\cdot128}$; г) $\sqrt{17\cdot51\cdot27}$; е) $\sqrt{2{,}5\cdot12{,}5\cdot20}$.

504. Найдите значение корня:

а) $\sqrt{50^2-14^2}$; в) $\sqrt{34^2-16^2}$; д) $\sqrt{2{,}9^2-2{,}1^2}$;

б) $\sqrt{\frac{61^2-60^2}{81}}$; г) $\sqrt{\frac{74^2-24^2}{121}}$; е) $\sqrt{\frac{6{,}2^2-5{,}9^2}{2{,}43}}$.

505. Представьте выражение в виде произведения двух корней:

а) $\sqrt{2ab}$, где $a > 0$, $b > 0$;

б) $\sqrt{5xy}$, где $x < 0$, $y < 0$;

в) $\sqrt{7axy}$, где $a < 0$, $x < 0$, $y > 0$;

г) $\sqrt{ax+bx}$, где $a < 0$, $b < 0$, $x < 0$.

506. Представьте выражение в виде частного двух корней:

а) $\sqrt{\frac{3a}{b}}$, где $a < 0$, $b < 0$; б) $\sqrt{\frac{a}{xy}}$, где $a < 0$, $x < 0$, $y > 0$.

507. Вычислите:

а) $\sqrt{6^4}$; в) $\sqrt{(-5)^6}$; д) $\sqrt{(-1)^{4n}}$, где $n \in N$;

б) $\sqrt{(-8)^4}$; г) $\sqrt{(0,1)^6}$; е) $\sqrt{(-1)^{4n+6}}$, где $n \in N$.

508. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{a^2}$ при $a = 6{,}5;\ 8{,}3;\ -0{,}1$;

б) $\sqrt{a^4}$ при $a = 3;\ 1;\ -0{,}1$;

в) $\sqrt{a^6}$ при $a = 1;\ -2;\ 0{,}1$.

509. Верно ли равенство:

а) $\sqrt{(-6)^8} = 6^4$; в) $\sqrt{(-5)^{4n}} = (-5)^{2n}$, где $n \in N$;

б) $\sqrt{(-9)^6} = (-9)^3$; г) $\sqrt{(-2)^{4n+2}} = (-2)^{2n+1}$, где $n \in N$?

510. Вычислите значение выражения:

а) $\sqrt{5^2 \cdot 7^2}$; б) $\sqrt{2^4 \cdot 3^6}$; в) $\sqrt{2^2 \cdot 5^2}$; г) $\sqrt{10^2 \cdot 6^6}$.

511. Найдите значение корня:

а) $\sqrt{\dfrac{7^2}{8^2}}$; б) $\sqrt{\dfrac{2^4}{3^6}}$; в) $\sqrt{\dfrac{2^8}{5^2}}$; г) $\sqrt{\dfrac{(-1)^4}{6^2}}$.

512. Найдите значение корня:

а) $\sqrt{11\,664}$; д) $\sqrt{46\,656}$;

б) $\sqrt{50\,625}$; е) $\sqrt{30\,276}$;

в) $\sqrt{65\,536}$; ж) $\sqrt{211\,600}$;

г) $\sqrt{35\,721}$; з) $\sqrt{164\,025}$.

513. Замените выражение тождественно равным:

а) $\sqrt{b^2}$; б) $\sqrt{x^4}$; в) $3\sqrt{a^8}$; г) $5\sqrt{a^6}$; д) $\sqrt{49a^{10}}$.

514. Преобразуйте выражение, зная, что $b > 0$:

а) $\sqrt{b^{10}}$; в) $\sqrt{64b^6}$; д) $12b^6\sqrt{4b^2}$;

б) $\sqrt{b^8}$; г) $b^2\sqrt{b^8}$; е) $-b\sqrt{b^8}$.

515. Преобразуйте выражение, зная, что $a < 0$:

а) $\sqrt{a^8}$; в) $\sqrt{a^6}$; д) $-a\sqrt{25a^6}$;

б) $\sqrt{a^{12}}$; г) $6a\sqrt{a^{10}}$; е) $-\sqrt{36a^{14}}$.

516. Упростите выражение:

а) $\sqrt{a^4b^6}$, если $b > 0$;
б) $\sqrt{a^{12}b^{26}}$, если $b < 0$;
в) $\sqrt{81x^{12}y^8}$;
г) $a^7\sqrt{a^6b^{12}}$, если $a > 0$;
д) $ab\sqrt{a^4b^2}$, если $b < 0$;
е) $-\sqrt{a^8y^{16}}$, если $y < 0$.

517. Упростите выражение:

а) $\sqrt{\dfrac{1{,}69a^8}{b^2}}$, если $b < 0$;
б) $\sqrt{\dfrac{0{,}16a^{14}}{b^{12}}}$, если $a > 0$.

518. Найдите значение произведения:

а) $\sqrt{1{,}8}\cdot\sqrt{0{,}2}$;
б) $\sqrt{1{,}5}\cdot\sqrt{\dfrac{2}{3}}$;
в) $\sqrt{500}\cdot\sqrt{3{,}2}$;
г) $\sqrt{1\dfrac{1}{8}}\cdot\sqrt{0{,}72}$;
д) $\sqrt{500}\cdot\sqrt{1{,}25}$;
е) $\sqrt{7\dfrac{1}{3}}\cdot\sqrt{66}$.

519. Найдите значение частного:

а) $\dfrac{\sqrt{10{,}8}}{\sqrt{0{,}3}}$; б) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{75}}$; в) $\dfrac{\sqrt{2{,}84}}{\sqrt{0{,}71}}$; г) $\dfrac{\sqrt{6{,}5}}{\sqrt{58{,}5}}$.

520. Упростите выражение:

а) $\left(\dfrac{1}{4}\sqrt{3}+\dfrac{1}{3}\sqrt{2}\right)3\sqrt{2}-0{,}75\sqrt{6}$; б) $\left(0{,}5\sqrt{6}-\sqrt{3}\right)4\sqrt{3}-2\sqrt{18}$.

521. Упростите выражение:

а) $\left(2\sqrt{1{,}2}-\sqrt{1{,}5}\right)^2+4\sqrt{1{,}8}$; б) $20\sqrt{0{,}42}-\left(5\sqrt{0{,}7}+2\sqrt{0{,}6}\right)^2$.

522. Решите уравнение:

а) $\left(\sqrt{6x}-2\right)^2=\sqrt{3}\left(\sqrt{2x}-\sqrt{12}\right)+6x$;

б) $\left(\sqrt{7x}-2\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{7x}+2\sqrt{5}\right)=7x-\sqrt{2}\left(\sqrt{5x}-\sqrt{72}\right)$.

523. Докажите, что является иррациональным число:

а) $\sqrt{2}+\sqrt{5}$; б) $\sqrt{5}-\sqrt{3}$; в) $\sqrt{7}+\sqrt{6}+1$; г) $\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{6}$.

524. Докажите, что если $a > 0$, $b > 0$, то:

а) $\left(\sqrt{ab}-\sqrt{\dfrac{b}{a}}-\sqrt{\dfrac{a}{b}}+\sqrt{\dfrac{1}{ab}}\right)\sqrt{ab}=(a-1)(b-1)$;

б) $\dfrac{2a\sqrt{ab}+a^2\sqrt{b}+2b\sqrt{ab}+ab\sqrt{b}}{2\sqrt{ab}+a\sqrt{b}}=a+b$;

в) $\left(\dfrac{a}{b}\sqrt{\dfrac{b}{a}}+\dfrac{b}{a}\sqrt{\dfrac{a}{b}}\right)\left(\sqrt{ab}-\sqrt{\dfrac{a}{b}}\right)+\dfrac{a+b}{b}=a+b$.

Упражнения для повторения

525. Имеет ли смысл выражение:

а) $\sqrt{(-0{,}6)^3}$; б) $\sqrt{3{,}6\cdot 2{,}4-3}$; в) $\sqrt{1-(-0{,}7)^2}$?

526. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 2x - y = 3, \\ x + 2y = -1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x + 2y = 1, \\ x - 3y = 4. \end{cases}$

25. Преобразование выражений, содержащих квадратные корни

Вы познакомились с различными преобразованиями выражений, содержащих квадратные корни. К ним относятся: представление корня из произведения в виде произведения корней, а корня из дроби — в виде частного корней; умножение и деление корней; извлечение корня из степени. Рассмотрим теперь другие примеры тождественных преобразований выражений, содержащих квадратные корни.

1. *Вынесение множителя за знак корня.*

Пусть требуется упростить выражение

$$\sqrt{3}+\sqrt{75}.$$

Для этого представим число 75 в виде произведения, в котором один из множителей является квадратом натурального числа, и применим теорему о корне из произведения. Получим:

$$\sqrt{75} = \sqrt{25\cdot 3} = \sqrt{25}\cdot\sqrt{3} = 5\sqrt{3}.$$

Мы представили $\sqrt{75}$ в виде произведения чисел 5 и $\sqrt{3}$. В таких случаях говорят, что мы вынесли множитель за знак корня.

Теперь можно упростить данное выражение:

$$\sqrt{3}+\sqrt{75} = \sqrt{3}+5\sqrt{3} = 6\sqrt{3}.$$

2. *Внесение множителя под знак корня.*

Сравним значения выражений

$$2\sqrt{10} \text{ и } \sqrt{41}.$$

Представим в выражении $2\sqrt{10}$ множитель 2 в виде арифметического квадратного корня и выполним умножение корней:

$$2\sqrt{10} = \sqrt{2^2}\cdot\sqrt{10} = \sqrt{40}.$$

Мы заменили произведение $2\sqrt{10}$ выражением $\sqrt{40}$. В таких случаях говорят, что мы внесли множитель под знак корня.

Теперь можно сравнить данные выражения. Так как $\sqrt{40} < \sqrt{41}$, то $2\sqrt{10} < \sqrt{41}$.

Заметим, что под знак корня можно вносить только неотрицательный множитель. Например, выражение $-5\sqrt{2}$ можно преобразовать, внося под знак корня множитель 5:

$$-5\sqrt{2} = -\left(5\sqrt{2}\right) = -\sqrt{25\cdot 2} = -\sqrt{50}.$$

Выражение $a\sqrt{15}$, где $a < 0$, можно преобразовать, внося под корень положительный множитель $-a$:

$$a\sqrt{15} = -(-a)\sqrt{15} = -\sqrt{15a^2}.$$

3. *Освобождение от иррациональности в знаменателе или в числителе дроби.*

Пусть требуется преобразовать дробь $\frac{5}{\sqrt{6}}$ так, чтобы ее знаменатель не содержал корней. Для этого умножим ее числитель и знаменатель на $\sqrt{6}$. Получим:

$$\frac{5}{\sqrt{6}} = \frac{5\sqrt{6}}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}} = \frac{5\sqrt{6}}{6}.$$

В таких случаях говорят, что мы освободились от иррациональности в знаменателе дроби.

Освободимся теперь от иррациональности в знаменателе дроби $\frac{7}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$.

Если разность $\sqrt{5} - \sqrt{3}$ умножить на сумму $\sqrt{5} + \sqrt{3}$, то получится выражение, не содержащее корней. Умножив числитель и знаменатель дроби на выражение $\sqrt{5} + \sqrt{3}$, получим:

$$\frac{7}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{7\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)} = \frac{7\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{7\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}{2}.$$

Аналогичным образом можно освободиться от иррациональности в числителе дроби.

Рассмотренные в данной главе различные преобразования выражений, содержащих квадратные корни, находят применение при решении широкого круга задач. Приведем примеры.

Пример 1. Найдем наибольшее значение дроби

$$\frac{\sqrt{a}-\sqrt{5}}{a-5}.$$

Представим знаменатель дроби в виде разности квадратов, воспользовавшись тем, что $a \geqslant 0$.

Получим:

$$\frac{\sqrt{a}-\sqrt{5}}{a-5} = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{5}}{\left(\sqrt{a}\right)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2} = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{5}}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{5}\right)} = \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{5}}.$$

Дробь $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{5}}$ принимает наибольшее значение, когда ее знаменатель является наименьшим, т. е. при $a = 0$. Если $a = 0$, то $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Значит, наибольшее значение дроби равно $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Найдем это значение с точностью до 0,01 с помощью калькулятора:

$$\frac{1}{\sqrt{5}} = \sqrt{0{,}2} \approx 0{,}45.$$

Пример 2. Упростим выражение

$$\frac{\dfrac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}}{a-b} + \frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} - \frac{\sqrt{ab}}{a-b}.$$

Упростим числитель первой дроби, воспользовавшись формулой суммы кубов двух выражений: $\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{(\sqrt{a})^3+(\sqrt{b})^3}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} =$

$= \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(a-\sqrt{ab}+b)}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = a - \sqrt{ab} + b.$

Поскольку первая и последняя дроби данного выражения имеют одинаковый знаменатель, то сначала найдем разность этих двух дробей: $\frac{a-\sqrt{ab}+b}{a-b} - \frac{\sqrt{ab}}{a-b} = \frac{a-2\sqrt{ab}+b}{a-b} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{a-b}$. Заметим, что разность $a - b$ можно представить как разность квадратов $\left(\sqrt{a}\right)^2 - \left(\sqrt{b}\right)^2$, так как по условию $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ и $a \neq b$. Тогда полученная дробь после сокращения будет равна $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$. Остается выполнить последнее действие: $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} + \frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = 1.$

527. Вынесите множитель за знак корня:

а) $\sqrt{98}$; б) $\sqrt{16a}$; в) $\sqrt{18c}$; г) $\sqrt{200p}$.

528. Вынесите множитель за знак корня:

а) $5\sqrt{18}$; в) $\frac{1}{3}\sqrt{72a}$; д) $-8\sqrt{8y}$;

б) $-6\sqrt{54}$; г) $0{,}2\sqrt{50x}$; е) $-\sqrt{0{,}03b}$.

529. Вынесите множитель за знак корня:

а) $\sqrt{5x^4}$; в) $\sqrt{8x^{12}}$; д) $\sqrt{2x^2}$, где $x > 0$;

б) $\sqrt{17a^6}$; г) $\sqrt{18y^8}$; е) $\sqrt{3a^2}$, где $a < 0$.

530. Упростите выражение:

а) $\sqrt{5a} - \sqrt{20a} + \sqrt{125a}$;

б) $6\sqrt{12x^3} + 4\sqrt{75x^3} - \sqrt{27x^3}$;

в) $1{,}2\sqrt{40b^5} - 3{,}4\sqrt{160b^5} + \sqrt{250b^5}$;

г) $\frac{2}{3}\sqrt{72a^7} - \frac{1}{4}\sqrt{200a^7} + 2\sqrt{8a^7}$.

531. Внесите множитель под знак корня:

а) $5\sqrt{3}$; в) $0{,}1\sqrt{30}$; д) $c\sqrt{10b}$, где $c > 0$;

б) $7\sqrt{2}$; г) $\frac{1}{3}\sqrt{6}$; е) $x^3\sqrt{7a}$, где $x < 0$.

532. Представьте данное выражение в виде арифметического квадратного корня или выражения, ему противоположного:

а) $0{,}2\sqrt{5}$; в) $4\sqrt{3a}$; д) $3a\sqrt{x}$, если $a < 0$;

б) $-6\sqrt{3}$; г) $-7\sqrt{x}$; е) $-7b\sqrt{a}$, если $b > 0$.

533. Расположите в порядке возрастания числа:

$\sqrt{78}$; $6\sqrt{2}$; $5\sqrt{3}$; $4\sqrt{6}$; $2\sqrt{17}$.

534. Расположите в порядке убывания числа:

$-3\sqrt{5}$; $3\sqrt{7}$; $-2\sqrt{11}$; $7\sqrt{2}$; $5\sqrt{3}$.

535. Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби:

а) $\dfrac{a}{3\sqrt{5}}$; в) $\dfrac{6}{\sqrt{a+b}}$; д) $\dfrac{16}{\sqrt{a}+\sqrt{6}}$;

б) $\dfrac{4b}{5\sqrt{c}}$; г) $\dfrac{4}{\sqrt{x-y}}$; е) $\dfrac{a}{\sqrt{c}-4}$.

536. Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби:

а) $\dfrac{18}{2\sqrt{3}+3}$; в) $\dfrac{16}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+1}$; д) $\dfrac{1}{2+\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{10}}$;

б) $\dfrac{11}{3\sqrt{5}-1}$; г) $\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{2}}$; е) $\dfrac{1}{\sqrt{15}-\sqrt{10}+\sqrt{3}-\sqrt{2}}$.

537. Освободитесь от иррациональности в числителе дроби:

а) $\dfrac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$; б) $\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$; в) $\dfrac{3-\sqrt{7}}{3+\sqrt{7}}$; г) $\dfrac{1-\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}}$.

538. Известно, что a, b, $\sqrt{ab}$ — рациональные числа. Верно ли утверждение, что рациональным является также число:

а) $(\sqrt{a}-\sqrt{b})(2\sqrt{a}+3\sqrt{b})$; б) $\sqrt{\dfrac{a}{b}}$; в) $\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$?

539. Известно, что x, y, $\sqrt{x}-\sqrt{y}$ — рациональные числа. Докажите, что $\sqrt{x}$ и $\sqrt{y}$ также являются рациональными числами.

540. Упростите выражение:

а) $\left(\sqrt{8a}-\sqrt{\dfrac{a}{2}}\right)-\left(8\sqrt{\dfrac{a}{2}}+\sqrt{2a}\right)$;

б) $\left(\sqrt{\dfrac{9x}{2}}+\sqrt{50x}-\sqrt{8x}\right)-\left(\sqrt{18x}-5\sqrt{\dfrac{x}{2}}\right)$;

в) $\left(x-2\sqrt{\dfrac{y}{x}}\right)\left(x+\dfrac{2}{x}\sqrt{xy}\right)$, если $x>0$, $y>0$.

541. Решите уравнение:

а) $\sqrt{2x}+3\sqrt{8x}=1-\sqrt{2x}$; в) $6\sqrt{3x}+5\sqrt{48x}-15=7\sqrt{27x}$;

б) $\sqrt{\dfrac{x}{2}}+\sqrt{\dfrac{2x}{9}}+\sqrt{\dfrac{x}{8}}=\dfrac{1}{6}$; г) $\sqrt{\dfrac{x}{3}}+\sqrt{\dfrac{3x}{16}}+3\sqrt{\dfrac{x}{27}}=\dfrac{11}{12}$.

542. Докажите, что числа являются противоположными:

а) $2-\sqrt{5}$ и $\dfrac{1}{\sqrt{5}+2}$; б) $\sqrt{3}-2$ и $\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$.

543. Докажите, что числа являются взаимно обратными:

а) $3-2\sqrt{2}$ и $3+\sqrt{8}$; б) $7-\sqrt{48}$ и $\sqrt{49}+4\sqrt{3}$.

544. Найдите, при каком a дробь принимает наибольшее значение, и вычислите это значение:

а) $\dfrac{\sqrt{a}-5}{a-25}$; б) $\dfrac{\sqrt{a}-4}{a-16}$; в) $\dfrac{3-\sqrt{a+4}}{5-a}$; г) $\dfrac{\sqrt{a+1}-3}{a-8}$.

545. Докажите тождество:

а) $\left(\sqrt{a}-\dfrac{1}{\sqrt{a}}\right)\cdot\left(\dfrac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}-\dfrac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1}+4\sqrt{a}\right)=4a$;

б) $\sqrt{x}+\dfrac{2\sqrt{xy}+y\sqrt{x}-x\sqrt{y}}{\sqrt{xy}}=\sqrt{y}+2$;

в) $\left(\dfrac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right):\left(\dfrac{3a-3b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)^2=\dfrac{1}{9}$;

г) $\left(\dfrac{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}+\sqrt{ab}\right)\cdot\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{(6b-6a)^2}=\dfrac{1}{36\sqrt{a}-36\sqrt{b}}$.

546. Упростите выражение:

а) $\left(\dfrac{a}{a+\sqrt{a^2-b^2}}+\dfrac{a}{a-\sqrt{a^2-b^2}}\right):\dfrac{2a}{b}$;

б) $\left(\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{x+4}}{\sqrt{x}-\sqrt{x+4}}+\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{x+4}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+4}}\right)\cdot\sqrt{\dfrac{x}{x+4}}$;

в) $\left(\dfrac{x+\sqrt{x^2-2x}}{x-\sqrt{x^2-2x}}-\dfrac{x-\sqrt{x^2-2x}}{x+\sqrt{x^2-2x}}\right)\cdot\sqrt{\dfrac{x}{x^2-4}}$;

г) $\left(\dfrac{\sqrt{x}}{y-\sqrt{xy}}+\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{xy}+y}\right):\dfrac{2\sqrt{xy}}{x^2-2xy+y^2}-\sqrt{y}$.

547. Упростите выражение:

а) $\left(\dfrac{1}{a+\sqrt{2}}-\dfrac{a^2+4}{a^3+2\sqrt{2}}\right)\cdot\left(\dfrac{a-\sqrt{2}}{2}+\dfrac{1}{a}\right)$;

б) $\left(\dfrac{1}{a-\sqrt{3}}-\dfrac{a^2+6}{a^3-3\sqrt{3}}\right)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{a+\sqrt{3}}{3}\right)$.

548. Упростите выражение:

а) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{a-1}}+\dfrac{1}{\sqrt{a+1}}\right)\cdot\dfrac{\sqrt{a^2-1}}{\sqrt{a-1}-\sqrt{a+1}}$,

если $a=\dfrac{b^2+c^2}{2bc}$, $c>0$, $b>0$, $b>c$;

б) $\dfrac{2b\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}$,

если $x=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}}+\sqrt{\dfrac{b}{a}}\right)$, $a>0$, $b>0$, $a>b$.

Упражнения для повторения

549. При делении некоторого целого числа на 26 получили остаток 17. Какой остаток получится при делении этого числа на 13?

550. Докажите тождество:

$$\left(\frac{1}{27b^3}+\frac{1}{a^3}\right)\left(\frac{a^2-3ab}{3ab-a^2-9b^2}+1\right)=\frac{a+3b}{3a^3b}.$$

551. Решите уравнение:

а) $(2x-1)(3x+2)=3x+2$;

б) $(3x-1)(2x+3)=2(2x+3)$.

26. Преобразование двойных радикалов

Выражение вида $\sqrt{a+b\sqrt{c}}$, где a, b и c — некоторые числа, называется *двойным* или *сложным радикалом.*

При преобразовании выражений, содержащих двойные радикалы, часто бывает удобно освободиться в двойном радикале от внешнего радикала.

Если подкоренное выражение представляет собой полный квадрат, то освободиться от внешнего радикала можно с помощью тождества $\sqrt{a^2}=|a|$.

Пример 1. Освободимся от внешнего радикала в выражении $\sqrt{21-8\sqrt{5}}$.

Попытаемся представить выражение $21 - 8\sqrt{5}$ в виде квадрата разности, рассматривая 21 как сумму квадратов чисел, а $8\sqrt{5}$ как их удвоенное произведение. Выражение $8\sqrt{5}$ можно представить, например, как удвоенное произведение чисел 2 и $2\sqrt{5}$ или чисел 4 и $\sqrt{5}$. Проверка убеждает нас, что именно в последнем случае сумма квадратов чисел равна 21.

Значит,

$$\sqrt{21-8\sqrt{5}} = \sqrt{\left(4-\sqrt{5}\right)^2} = |4 - \sqrt{5}|.$$

Так как $4 > \sqrt{5}$, то $|4 - \sqrt{5}| = 4 - \sqrt{5}$.

Итак, мы получим, что

$$\sqrt{21-8\sqrt{5}} = 4 - \sqrt{5}.$$

В некоторых случаях удается освободиться от внешнего радикала с помощью *формулы двойного радикала*:

$$\sqrt{a\pm\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}},$$

где a и b — некоторые числа, причем $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $a^2 - b \geqslant 0$. Впервые эти формулы упоминаются в X книге «Начал» Евклида.

Нетрудно убедиться в справедливости этой формулы. Действительно, при указанных условиях правая часть равенства представляет собой выражение, которое имеет смысл и принимает неотрицательное значение. Докажем, что квадрат этого выражения равен $a \pm \sqrt{b}$.

В самом деле,

$$\left(\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}\right)^2 =$$

$$= \frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2} \pm 2\cdot\sqrt{\frac{a^2-(a^2-b)}{4}} + \frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2} =$$

$$= \frac{a+\sqrt{a^2-b}\pm2\sqrt{b}+a-\sqrt{a^2-b}}{2} = a \pm \sqrt{b}.$$

Справедливость формулы доказана.

В тех случаях, когда разность $a^2 - b$ является точным квадратом, формула двойного радикала позволяет освободиться от внешнего радикала.

Пример 2. Освободимся от внешнего радикала в выражении $\sqrt{75-\sqrt{3024}}$.

По формуле двойного радикала имеем:

$$\sqrt{75-\sqrt{3024}} = \sqrt{\frac{75+\sqrt{2601}}{2}} - \sqrt{\frac{75-\sqrt{2601}}{2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{75+51}{2}} - \sqrt{\frac{75-51}{2}} = \sqrt{63} - \sqrt{12}.$$

Пример 3. Освободимся от иррациональности в знаменателе дроби $\dfrac{\sqrt{2\sqrt{3}+2}}{\sqrt{2\sqrt{3}-2}}$.

Умножим числитель и знаменатель дроби сначала на $\sqrt{2\sqrt{3}+2}$, а затем на $\sqrt{2}$.

Получим:

$$\frac{\sqrt{2\sqrt{3}+2}}{\sqrt{2\sqrt{3}-2}} = \frac{\sqrt{2\sqrt{3}+2}\cdot\sqrt{2\sqrt{3}+2}}{\sqrt{2\sqrt{3}-2}\cdot\sqrt{2\sqrt{3}+2}} = \frac{2\sqrt{3}+2}{\sqrt{12-4}} = \frac{2\sqrt{3}+2}{\sqrt{8}} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3}+1)\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}.$$

Пример 4. Докажем, что при $1 \leqslant a \leqslant 2$ значение выражения

$$\sqrt{a+2\sqrt{a-1}} + \sqrt{a-2\sqrt{a-1}}$$

не зависит от a.

В каждом из двойных радикалов освободимся от внешнего радикала:

$$\sqrt{a+2\sqrt{a-1}} = \sqrt{(a-1)+2\sqrt{a-1}+1} = \sqrt{\left(\sqrt{a-1}+1\right)^2} =$$

$$= \left|\sqrt{a-1}+1\right| = \sqrt{a-1} + 1;$$

$$\sqrt{a-2\sqrt{a-1}} = \sqrt{(a-1)-2\sqrt{a-1}+1} =$$

$$= \sqrt{\left(\sqrt{a-1}-1\right)^2} = \left|\sqrt{a-1}-1\right|.$$

Если $1 \leqslant a \leqslant 2$, то $\left|\sqrt{a-1}-1\right| = 1 - \sqrt{a-1}$.

Отсюда

$$\sqrt{a+2\sqrt{a-1}} + \sqrt{a-2\sqrt{a-1}} = \sqrt{a-1} + 1 + 1 - \sqrt{a-1} = 2.$$

552. Имеет ли смысл выражение:

а) $\sqrt{3-2\sqrt{2}}$; в) $\sqrt{6\sqrt{3}-13}$;

б) $\sqrt{15-11\sqrt{2}}$; г) $\sqrt{5\sqrt{3}-6\sqrt{2}}$?

553. Сторона правильного восьмиугольника, вписанного в круг с радиусом R, вычисляется по формуле $a_8 = R\sqrt{2-\sqrt{2}}$, а правильного двенадцатиугольника — по формуле $a_{12} = R\sqrt{2-\sqrt{3}}$. Вычислите с помощью калькулятора a_8 и a_{12} (с точностью до 0,1), если:

а) $R = 15{,}6$ см; б) $R = 6{,}7$ см.

554. В знаменитом трактате «Начала» Евклид доказал геометрически следующую теорему: если в одну и ту же окружность вписаны правильные пятиугольник, шестиугольник и десятиугольник, то площадь квадрата, построенного на стороне пятиугольника, равна сумме площадей квадратов, построенных на сторонах шестиугольника и десятиугольника. Докажите эту теорему алгебраически, зная, что

$$a_5 = \frac{1}{2}R\sqrt{10-2\sqrt{5}}, \quad a_6 = R, \; a_{10} = \frac{1}{2}R\left(\sqrt{5}-1\right),$$

где R — радиус окружности, a_5, a_6, a_{10} — длины сторон правильных вписанных в окружность пятиугольника, шестиугольника и десятиугольника.

555. Выполните умножение:

а) $\sqrt{6+\sqrt{11}} \cdot \sqrt{6-\sqrt{11}}$;

б) $\sqrt{\sqrt{5}+2} \cdot \sqrt{\sqrt{5}-2}$;

в) $\sqrt{2-\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{3}}$;

г) $\sqrt{\sqrt{17}-2\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\sqrt{17}+2\sqrt{2}}$.

Титульный лист первого русского печатного издания «Начал» Евклида, Санкт-Петербург, 1739 г.

556. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{\sqrt{23}-\sqrt{19}} \cdot \sqrt{\sqrt{23}+\sqrt{19}} + \sqrt{5\sqrt{2}+7} \cdot \sqrt{5\sqrt{2}-7}$;

б) $\sqrt{3-2\sqrt{2}} \cdot \sqrt{3+2\sqrt{2}} - \sqrt{7-2\sqrt{6}} \cdot \sqrt{7+2\sqrt{6}}$.

557. Докажите, что

$$\sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}} = 1.$$

558. Упростите выражение:

а) $\left(\sqrt{3+\sqrt{5}} + \sqrt{3-\sqrt{5}}\right)^2$;

б) $\left(\sqrt{6-3\sqrt{3}} - \sqrt{6+3\sqrt{3}}\right)^2$;

в) $\left(\sqrt{7+4\sqrt{3}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}}\right)^2$;

г) $\left(\sqrt{\sqrt{17}-2\sqrt{2}} - \sqrt{\sqrt{17}+2\sqrt{2}}\right)^2$.

559. Найдите a^2 и a, если:

а) $a = \sqrt{21+2\sqrt{38}} + \sqrt{21-2\sqrt{38}}$;

б) $a = \sqrt{22+2\sqrt{85}} - \sqrt{22-2\sqrt{85}}$.

560. Упростите выражение, представив подкоренное выражение в виде квадрата:

а) $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$; в) $\sqrt{13-4\sqrt{3}}$;

б) $\sqrt{4-2\sqrt{3}}$; г) $\sqrt{9+4\sqrt{2}}$.

561. Найдите значение x, если:

а) $x = \sqrt{11+6\sqrt{2}} + \sqrt{11-6\sqrt{2}}$;

б) $x = \sqrt{12-2\sqrt{11}} - \sqrt{12+2\sqrt{11}}$.

562. Докажите, что значение выражения является целым числом:

а) $\sqrt{3-2\sqrt{2}} - \sqrt{2}$; в) $\sqrt{81+8\sqrt{5}} - 4\sqrt{5}$;

б) $\sqrt{3} - \sqrt{4+2\sqrt{3}}$; г) $\sqrt{16-8\sqrt{3}} + 2\sqrt{3}$.

563. Выясните, рациональным или иррациональным числом является значение выражения:

а) $\sqrt{12+2\sqrt{11}}+\sqrt{12-2\sqrt{11}}$;

б) $\sqrt{14+2\sqrt{33}}-\sqrt{14-2\sqrt{33}}$;

в) $\sqrt{9+4\sqrt{2}}+\sqrt{9-4\sqrt{2}}$;

г) $\sqrt{11-6\sqrt{2}}-\sqrt{11+6\sqrt{2}}$.

564. Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби:

а) $\dfrac{18}{\sqrt{\sqrt{11}-\sqrt{2}}}$; в) $\dfrac{9}{\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{2}}}$;

б) $\dfrac{6}{\sqrt{\sqrt{3}-1}}$; г) $\dfrac{12}{\sqrt{2\sqrt{6}+\sqrt{15}}}$.

565. Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби:

а) $\dfrac{\sqrt{\sqrt{5}-2}}{\sqrt{\sqrt{5}+2}}$; в) $\dfrac{\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}}}{\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}}$;

б) $\dfrac{\sqrt{\sqrt{12}+\sqrt{3}}}{\sqrt{\sqrt{12}-\sqrt{3}}}$; г) $\dfrac{\sqrt{\sqrt{7}-\sqrt{5}}}{\sqrt{\sqrt{7}+\sqrt{5}}}$.

566. Упростите выражение:

а) $2a^2-5-\sqrt{4a^4+\sqrt{1+8a^2+16a^4}}$;

б) $9a-\sqrt{\sqrt{64a^4+16a^2+1}+a^2-6a}$, где $a>1$.

567. Освободитесь от внешнего радикала, представив подкоренное выражение в виде квадрата:

а) $\sqrt{2a+2\sqrt{a^2-1}}$, где $a>1$;

б) $\sqrt{2a+2\sqrt{a^2-b^2}}$, где $a>b$.

568. Докажите, что если $a>0$, $b>0$, $abc>4$, то

$$\sqrt{\frac{abc+4}{a}-4\sqrt{\frac{bc}{a}}}=\frac{\sqrt{abc}-2}{\sqrt{a}}.$$

569. Упростите выражение:

а) $\sqrt{\frac{3b+a^2}{2a}+\sqrt{3b}}+\sqrt{\frac{3b+a^2}{2a}-\sqrt{3b}}$, если $a>0$, $b>0$, $a>\sqrt{3b}$;

б) $\sqrt{\frac{a+\sqrt{4(a-1)}}{a-\sqrt{4(a-1)}}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{4(a-1)}}{a+\sqrt{4(a-1)}}}-\frac{4}{a-2}$, если $a>2$.

Упражнения для повторения

570. Докажите, что при $a > -1$ выражение

$$\left(\frac{a+1}{a-1}-\frac{a-1}{a+1}\right):\frac{4a}{5a-5}$$

принимает положительные значения.

571. В одной системе координат постройте графики функций $y = x^2$ и $y = x + 6$, с их помощью найдите решение уравнения $x^2 - x - 6 = 0$.

Контрольные вопросы и задания

1. Сформулируйте и докажите теоремы о квадратном корне из произведения и дроби.

2. Сформулируйте и докажите теорему о квадратном корне из степени. Найдите значение выражения $\sqrt{(-2)^6\cdot(-3)^8}$.

3. На примере выражений $\sqrt{50a}$ и $2\sqrt{a}$ объясните, как выполняется вынесение множителя за знак корня и внесение множителя под знак корня.

4. На примере выражений $\frac{a}{\sqrt{b}}$ и $\frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$ объясните, как в выражениях такого вида можно освободиться от иррациональности в знаменателе дроби.

Дополнительные упражнения к главе 3

К параграфу 6

572. Представьте в виде бесконечной десятичной периодической дроби число:

а) $\frac{9}{13}$; б) $\frac{11}{70}$; в) $\frac{468}{99}$; г) $\frac{1}{300}$.

573. Запишите три каких-либо рациональных числа, заключенных между числами $-\frac{1}{7}$ и 0,(7).

574. Найдите значение выражения:

а) 1,(3) + 3,(1);   в) 1,(3) − 0,2(21);

б) 1,(3) + 3,2(5);   г) 2,1(6) : 0,3.

575. Диагональ квадрата равна $2e$, где e — единичный отрезок. Докажите, что сторона этого квадрата не выражается через отрезок e рациональным числом.

576. Может ли разность рационального и иррационального чисел быть рациональным числом?

577. Докажите, что не существует рационального числа, квадрат которого равен 3.

578. На координатной прямой изобразите числовой промежуток:

а) [3; 3,(3)];   в) (−3,3; −3,03);

б) [−3; 0,3);   г) (−3,0(3); +∞).

Запишите неравенство, задающее каждый числовой промежуток.

579. На координатной прямой изобразите числовой промежуток, заданный неравенством:

а) $-\frac{2}{7} < x \leqslant 2,7$;   в) $-\frac{2}{7} \leqslant x < 2,7$;

б) $x \leqslant 2,7$;   г) $x > -\frac{2}{7}$.

Запишите обозначение и название каждого числового промежутка.

580. Среди учащихся 8-го класса провели опрос: сколько времени (в среднем) занимает дорога от дома до школы. Были получены следующие результаты (в минутах):

16; 6; 14; 3; 7; 28; 12; 23; 35; 8; 17; 31; 40; 24; 7; 5; 13; 18; 11; 4; 6; 22; 30; 14; 15; 6; 27; 8.

Используя полученные данные, составьте интервальный ряд с интервалом: а) 5 мин; б) 10 мин. Для каждого интервального ряда данных постройте гистограмму.

581. Запишите каждое из чисел $\frac{3}{32}$, $\frac{125}{64}$, $3\frac{2}{3}$, $5\frac{9}{11}$ и $7\frac{5}{6}$ в виде десятичной или бесконечной десятичной дроби. Округлите результат до десятых и найдите абсолютную погрешность приближенного значения.

582. Запишите каждое из чисел $4\frac{3}{4}$, $1\frac{5}{8}$, $2\frac{4}{25}$ и $\frac{92}{125}$ в виде десятичной дроби, округлите результат до десятых, найдите относительную погрешность и выразите ее в процентах.

583. Какое из приближенных значений 3,14; 3,15; $3\frac{1}{7}$ и $3\frac{10}{71}$ числа $\pi = 3{,}14159...$ является более точным?

584. Округлите слагаемые в сумме $2{,}8475 + 5{,}139$ до десятых, сложите приближенные значения и найдите абсолютные погрешности приближенных значений слагаемых и суммы.

585. Докажите, что лучшим из трех приближенных значений a, b и $\frac{a+b}{2}$ числа α является среднее арифметическое a и b, если $a \leqslant \alpha \leqslant b$.

586. Масса таблетки приближенно равна 25 мг (с точностью до 1 мг), а масса человека приближенно равна 85 кг (с точностью до 0,5 кг). Сравните качества измерений.

587. Прибор дает возможность измерить величину с относительной точностью до 0,1%. При измерении в результате получили 625. Оцените абсолютную погрешность.

К параграфу 7

588. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{2{,}56}$; б) $\sqrt{3\frac{1}{16}}$; в) $\left(\sqrt{2}\right)^2$; г) $\left(-2\sqrt{3}\right)^2$.

589. Запишите все целые числа, принадлежащие интервалу:

а) $\left(-\sqrt{2};\ 1 + \sqrt{3}\right)$; в) $\left(5 - \sqrt{35};\ 5 + \sqrt{35}\right)$;

б) $\left(2 - \sqrt{2};\ \sqrt{111}\right)$; г) $\left(-1;\ \sqrt{3 + \sqrt{2}}\right)$.

590. Расположите в порядке возрастания числа 12; $\sqrt{145}$; 11,8; 12,1; $\sqrt{140}$; $\sqrt{131}$.

591. Площадь S треугольника со сторонами a, b, c можно найти по формуле Герона Александрийского (I в.)

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

где $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ — полупериметр треугольника. Найдите площадь треугольника, если:

а) $a = 13$, $b = 14$, $c = 15$;
б) $a = 5$, $b = 9$, $c = 12$;
в) $a = 5$, $b = 9$, $c = \sqrt{34}$;
г) $a = \sqrt{29}$, $b = \sqrt{65}$, $c = \sqrt{106}$.

592. Решите уравнение:

а) $\sqrt{3x-2} + 1 = 4$;
б) $5 + \sqrt{3-0{,}4x} = 1$;
в) $3\sqrt{0{,}7x} + 6 = 7$;
г) $9 - 4\sqrt{-x} = 1$;
д) $3 + 2\sqrt{2+0{,}6x} = 9$;
е) $6 - 3\sqrt{x-1} = 7$.

593. Пересекает ли график функции $y = \sqrt{x}$ прямую:

а) $y = 0{,}5x$; б) $y = 0{,}5x + 1$?

При положительном ответе укажите координаты точек пересечения.

К параграфу 8

594. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{16{,}9 \cdot 14{,}4 \cdot 0{,}36}$;
б) $\sqrt{8{,}1 \cdot 0{,}64 \cdot 12{,}1}$;
в) $\sqrt{2{,}5 \cdot 2{,}4 + 2{,}5^2}$;
г) $\sqrt{19{,}6 \cdot 4{,}6 - 19{,}6}$.

595. Вычислите значение выражения:

а) $\sqrt{\dfrac{12{,}5^2 - 10^2}{64}}$;
б) $\sqrt{\dfrac{81}{5^2 - 1{,}4^2}}$;
в) $\sqrt{\dfrac{65^2 - 25^2}{1{,}96}}$;
г) $\sqrt{\dfrac{1{,}44}{11{,}7^2 - 10{,}8^2}}$.

596. Упростите выражение:

а) $\sqrt{(x-9)^2}$ при $x \geqslant 9$;
б) $\sqrt{(7-a)^2}$ при $a \leqslant 7$;
в) $\sqrt{x^2 - 12x + 36}$ при $x \geqslant 6$;
г) $\sqrt{4a^2 - 4a + 1}$ при $a > 1$.

597. Упростите выражение:

а) $\sqrt{b^2 - b + 0{,}25} - \sqrt{b^2 - 1{,}2b + 0{,}36}$, если $0{,}5 \leqslant b \leqslant 0{,}6$;

б) $\sqrt{4p^2 + 4p + 1} - \sqrt{9p^2 + 1 - 6p}$, если $p \geqslant \dfrac{1}{3}$.

598. Вынесите множитель за знак корня:

а) $\sqrt{a^7b^6}$, если $a > 0$, $b < 0$;

б) $\sqrt{0{,}02x^5y^5}$, если $x > 0$, $y > 0$;

в) $\sqrt{a^{12}b^5}$, если $a > 0$, $b > 0$;

г) $\sqrt{75x^3y^5}$, если $x < 0$, $y < 0$.

599. Упростите выражение:

а) $2\left(3\sqrt{a} - \dfrac{\sqrt{a^3}}{a}\right) - 3\left(\sqrt{a} + \dfrac{\sqrt{a^5}}{a^2}\right)$;

б) $3\left(\sqrt{ab} - \dfrac{2\sqrt{a^5b}}{b^2}\right) + \left(\dfrac{6\sqrt{ab^5}}{b^2} - \dfrac{\sqrt{a^3b}}{a}\right)$.

600. Сравните значения выражений:

а) $a\sqrt{a}$ и $\sqrt{a^5}$ при $a > 1$;

б) $b^2\sqrt{b^5}$ и $\sqrt{b^{11}}$ при $b > 1$.

601. Упростите выражение:

а) $(3\sqrt{2} - 1)(1 + 3\sqrt{2}) - (3\sqrt{2} - \sqrt{1{,}5})^2 - 6\sqrt{3}$;

б) $(8 + 2\sqrt{15})(\sqrt{5} - \sqrt{3})^2 - (\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})$;

в) $(4\sqrt{2} - 2\sqrt{3})(6\sqrt{2} + 3\sqrt{3}) - (1 - \sqrt{3})(\sqrt{3} + 1)$;

г) $(3\sqrt{2} + 2\sqrt{3})(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 + 2\sqrt{3}$.

602. Найдите значение выражения:

а) $a^4 - a^2 + 6$ при $a = 1 - \sqrt{3}$;

б) $a^4 - 6a^2$ при $a = 1 + \sqrt{2}$.

603. Докажите, что каждое из чисел $2 + \sqrt{3}$ и $2 - \sqrt{3}$ является корнем уравнения $x^2 - 4x + 1 = 0$.

604. Из данных чисел выберите пары противоположных чисел:

$$1 - 3\sqrt{2};\quad -0{,}2\sqrt{3} + 0{,}1\sqrt{2};\quad \sqrt{8} - 3;$$

$$\frac{1}{\sqrt{12}+\sqrt{2}};\quad \frac{1}{3+2\sqrt{2}};\quad \sqrt{18} - 1.$$

605. Из данных чисел выберите пары взаимно обратных чисел:

$$3-2\sqrt{2};\quad \sqrt{6}-1;\quad \sqrt{12}-\sqrt{2};$$

$$0{,}1\sqrt{2}+0{,}2\sqrt{3};\quad 3+2\sqrt{2};\quad 0{,}2\sqrt{6}+0{,}2.$$

606. Выясните, при каких значениях a дробь принимает наибольшее значение, и найдите это значение:

а) $\dfrac{1-\sqrt{a-2}}{3-a}$; б) $\dfrac{\sqrt{a+4}-2}{a}$.

607. Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби:

а) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$; в) $\dfrac{1}{2-\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{6}}$;

б) $\dfrac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}-1}$; г) $\dfrac{1}{\sqrt{10}-\sqrt{15}+\sqrt{14}-\sqrt{21}}$.

608. Упростите выражение:

а) $\left(\sqrt{b}+\dfrac{1}{\sqrt{a}}+\dfrac{1}{\sqrt{ab}}+1\right):\left(1+\dfrac{\sqrt{ab}}{ab}\right)$;

б) $\left(\sqrt{a}-\dfrac{1}{\sqrt{b}}-\dfrac{1}{\sqrt{ab}}+1\right):\left(1-\dfrac{\sqrt{a}}{a\sqrt{b}}\right)$.

609. Докажите, что при всех допустимых значениях переменных значение выражения не зависит от значений переменных:

а) $\left(\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right):\dfrac{\sqrt{16ab}}{a-b}$;

б) $\dfrac{x\sqrt{y}-y\sqrt{x}+2\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}}+\sqrt{y}-\sqrt{x}$.

610. Сократите дробь:

а) $\dfrac{x^4+1}{x^2+x\sqrt{2}+1}$; б) $\dfrac{2\sqrt{1-x^2}+x^2-2}{1-\sqrt{1-x}\cdot\sqrt{x+1}}$.

611. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{4-\sqrt{15}}+\sqrt{4+\sqrt{15}}$; в) $\sqrt{6+2\sqrt{5}}+\sqrt{6-2\sqrt{5}}$;

б) $\sqrt{7-\sqrt{13}}-\sqrt{7+\sqrt{13}}$; г) $\sqrt{7-\sqrt{33}}-\sqrt{7+\sqrt{33}}$.

612. Упростите выражение:

а) $\left(\sqrt{\sqrt{40}+6}+\sqrt{\sqrt{40}-6}\right)^2$

(Лука Пачоли (1445—1514), итальянский математик);

б) $\left(\sqrt{12+\sqrt{6}}+\sqrt{12-\sqrt{6}}\right)^2$

(Михаил Штифель (1486—1567), немецкий математик);

в) $\left(\sqrt{5+\sqrt{3}}+\sqrt{5-\sqrt{3}}\right)^2$

(Симон Стевин (1548—1620), голландский инженер).

613. Докажите, что $\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\dfrac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}=\sqrt{2}$

(Жозеф Бертран (1822—1900), французский математик).

614. Докажите, что

$$\left(\frac{6+4\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{6+4\sqrt{2}}}+\frac{6-4\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{6-4\sqrt{2}}}\right)^2=8.$$

615. Упростите выражение:

а) $\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{5}$; в) $\sqrt{9-2\sqrt{14}}+\sqrt{9+2\sqrt{14}}$;

б) $\sqrt{3}-\sqrt{7+4\sqrt{3}}$; г) $\sqrt{23+8\sqrt{7}}-\sqrt{23-8\sqrt{7}}$.

616. Упростите выражение:

а) $\sqrt{\dfrac{a+1}{2}-\sqrt{a}}-\sqrt{\dfrac{a+1}{2}+\sqrt{a}}$; б) $\sqrt{\dfrac{a+4}{4}+\sqrt{a}}-\sqrt{\dfrac{a+4}{4}-\sqrt{a}}$.

617. Упростите выражение:

$$\frac{x+y-1}{x-y+1}, \text{ если } x=\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{ab}+1},\ y=\frac{\sqrt{a}\left(\sqrt{b}+1\right)}{\sqrt{ab}-1}.$$

618. Докажите, что

$$\sqrt{10+\sqrt{24}+\sqrt{40}+\sqrt{60}}=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}.$$

(Тождество индийского математика и астронома Бхаскара, (1114 — позднее 1178 г.)).

619. Упростите выражение:

а) $\sqrt{2a^2+\sqrt{a^8+2a^4+1}}$;

б) $\sqrt{4a^2+1+\sqrt{a^8+6a^4+9}}$;

в) $\sqrt{2a+2+2\sqrt{a^2+2a}}-\sqrt{a}$, где $a>0$;

г) $\sqrt{2a-2\sqrt{a^2-4}}+\sqrt{a-2}$, где $a>2$;

д) $\sqrt{a+3-4\sqrt{a-1}}-\sqrt{a+8-6\sqrt{a-1}}$, где $a>10$.

620. Упростите выражение:

$$\sqrt{x+2\sqrt{x-2}-1}+\sqrt{x-2\sqrt{x-2}-1}, \text{ если:}$$

а) $2\leqslant x\leqslant 3$; б) $x>3$.

621. Докажите, что при положительных значениях a, b и c выражение

$$\sqrt{a+b+c+2\sqrt{ac+bc}}+\sqrt{a+b+c-2\sqrt{ac+bc}}$$

тождественно равно:

а) $2\sqrt{a+b}$, если $a+b\geqslant c$; б) $2\sqrt{c}$, если $a+b<c$.

ГЛАВА 4

КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 9. КВАДРАТНОЕ УРАВНЕНИЕ И ЕГО КОРНИ

27. Определение квадратного уравнения. Неполные квадратные уравнения

Левая часть уравнения $3x^2 - 5x - 2 = 0$ есть квадратный трехчлен, а правая — число нуль. Такие уравнения называют *квадратными уравнениями*.

Определение. **Квадратным уравнением называется уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где x — переменная, a, b и c — некоторые числа, причем $a \neq 0$.**

Уравнения $2x^2 + 5x + 1 = 0$; $x^2 - x + 9 = 0$; $3x^2 - 7x = 0$; $\frac{1}{4}x^2 + 1 = 0$; $-0{,}5x^2 = 0$ являются квадратными уравнениями, так как каждое из них имеет вид $ax^2 + bx + c = 0$. В первом из этих уравнений $a = 2$, $b = 5$ и $c = 1$; во втором $a = 1$, $b = -1$ и $c = 9$; в третьем $a = 3$, $b = -7$ и $c = 0$; в четвертом $a = \frac{1}{4}$, $b = 0$ и $c = 1$; в пятом $a = -0{,}5$, $b = c = 0$.

Числа a, b и c называют *коэффициентами квадратного уравнения*. Число a называют *первым коэффициентом*, число b — *вторым коэффициентом*, число c — *свободным членом*.

Заметим, что квадратное уравнение относится к уравнениям второй степени, так как его левая часть представляет многочлен второй степени.

Наиболее простыми для решения являются квадратные уравнения, в которых b или c равно нулю. Такие уравнения называют *неполными квадратными уравнениями*. К их числу относятся, например, уравнения: $5x^2 + 3x = 0$; $-4x^2 + 12 = 0$; $2x^2 = 0$. В первом из них $c = 0$ и $b \neq 0$, во втором $b = 0$ и $c \neq 0$, в третьем $b = 0$ и $c = 0$. Эти уравнения представляют различные виды неполных квадратных уравнений, отличающиеся способом решения. Рассмотрим по порядку решение всех этих видов уравнений.

П р и м е р 1. Решим уравнение $5x^2 + 3x = 0$.

Разложим левую часть уравнения на множители, получим:

$$x(5x + 3) = 0.$$

Отсюда

$$x = 0 \text{ или } 5x + 3 = 0.$$

Значит, уравнение $5x^2 + 3x = 0$ имеет два корня: 0 и $-\frac{3}{5}$.

О т в е т: $0; -\frac{3}{5}$.

Уравнение $5x^2 + 3x = 0$ является неполным квадратным уравнением вида $ax^2 + bx = 0$, где $b \neq 0$. Чтобы решить такое уравнение, достаточно его левую часть разложить на множители. Получится уравнение

$$x(ax + b) = 0.$$

Произведение $x(ax + b)$ равно нулю тогда и только тогда, когда $x = 0$ или $ax + b = 0$.

Уравнение $x = 0$ имеет корень 0. Решая уравнение $ax + b = 0$, получим еще один корень $-\frac{b}{a}$, так как $a \neq 0$ по определению квадратного уравнения.

Значит, неполное квадратное уравнение вида $ax^2 + bx = 0$, где $b \neq 0$, имеет два корня: 0 и $-\frac{b}{a}$.

П р и м е р 2. Решим уравнение $-4x^2 + 12 = 0$.

Перенесем свободный член уравнения в правую часть:

$$-4x^2 = -12.$$

Разделим обе части получившегося уравнения на -4:

$$x^2 = 3.$$

Существуют лишь два числа, квадраты которых равны числу 3. Это числа $\sqrt{3}$ и $-\sqrt{3}$. Значит, уравнение $-4x^2 + 12 = 0$ имеет два корня: $\sqrt{3}$ и $-\sqrt{3}$.

О т в е т: $\sqrt{3}; -\sqrt{3}$.

Уравнение $-4x^2 + 12 = 0$ является неполным квадратным уравнением вида $ax^2 + c = 0$, где $c \neq 0$. Не всякое уравнение такого вида имеет корни. Например, уравнение $5x^2 + 4 = 0$ не имеет корней.

Рассмотрим в общем виде решение неполного квадратного уравнения $ax^2 + c = 0$, где $c \neq 0$.

Перенесем его свободный член в правую часть и обе части получившегося уравнения разделим на a, так как $a \neq 0$. Получим:

$$ax^2 = -c; \qquad x^2 = -\frac{c}{a}.$$

Так как $c \neq 0$, то $-\frac{c}{a}$ может быть или положительным, или отрицательным числом.

Если $-\frac{c}{a} > 0$, то уравнение $x^2 = -\frac{c}{a}$, следовательно, и равносильное ему уравнение $ax^2 + c = 0$ имеет два корня: $\sqrt{-\frac{c}{a}}$ и $-\sqrt{-\frac{c}{a}}$. Если $-\frac{c}{a} < 0$, то уравнение $ax^2 + c = 0$ не имеет корней, так как не существует значения x, квадрат которого равен отрицательному числу $-\frac{c}{a}$.

Пример 3. Решим уравнение $-1{,}5x^2 = 0$.

Разделим обе части уравнения на $-1{,}5$, получим уравнение $x^2 = 0$. Его корнем является лишь число 0.

Ответ: 0.

Уравнение $-1{,}5x^2 = 0$ является неполным квадратным уравнением вида $ax^2 = 0$. При любом отличном от нуля значении a оно имеет единственный корень — число 0.

622. Является ли квадратным уравнение:

а) $-3{,}5x^2 + 6x + 9 = 0$; г) $-25x + 1 = 0$;
б) $4x^3 - 5x - 2 = 0$; д) $9x^2 - 5 = 0$;
в) $-x^2 + 6x = 0$; е) $8x^2 = 0$?

623. Преобразуйте уравнение в квадратное и назовите его коэффициенты:

а) $3x(x - 2) + (x - 1)(x + 1) = -2$;
б) $(2x - 1)^2 - (3x + 2)(3x - 2) = 0$;
в) $(x - 4)(x + 4) + (2x + 1)^2 = 4x$;
г) $(5x - 1)^2 - (5x + 1)^2 = (4x + 1)^2 + (4x - 1)^2$.

624. При каком значении m уравнение

а) $3x^2 + (m - 1)x + m - 4 = 0$;

б) $2x^2 - (9 - m)x + (m - 9) = 0$;

в) $(m - 1)x^2 + (m^2 - 1)x + 7 = 0$;

г) $(m^2 + \sqrt{3})x^2 - 5x + m^2 - 3 = 0$

обращается в неполное квадратное уравнение? Напишите это уравнение.

625. Решите уравнение:

а) $5x^2 + 3x = 0$; в) $-3u^2 + 2{,}1u = 0$; д) $7m^2 + m = 0$;

б) $2x^2 - 1{,}2x = 0$; г) $2{,}5v^2 = 7{,}5v$; е) $2m = 3m^2$.

626. Найдите корни уравнения:

а) $3x^2 - 27 = 0$; в) $5a^2 = 10$; д) $9m^2 - 4 = 0$;

б) $-2x^2 + 50 = 0$; г) $-0{,}2y^2 + 1 = 0$; е) $\frac{1}{5} = \frac{1}{4}n^2$.

627. Решите уравнение:

а) $-4x^2 + 3x = 0$; в) $9m^2 = -m$; д) $-1{,}7p^2 = 0$;

б) $25x^2 - 7 = 0$; г) $-m^2 + 8 = 0$; е) $3{,}2k^2 = 0$.

628. Найдите корни уравнения:

а) $100x^2 - 9x = 0$; г) $2{,}4p^2 + 7{,}2p = 0$;

б) $9x^2 - 100 = 0$; д) $-0{,}8y^2 + 3y = 0$;

в) $2 = 7x^2$; е) $0{,}2(n - 2)^2 - 5{,}4 = 0$.

629. Является ли квадратным уравнение $x^2 + 2|x| = 0$? Найдите его корни.

630. Решите относительно x уравнение:

а) $x^2 - a^2 + 2a - 1 = 0$; б) $-\frac{1}{4}x^2 + m^2 + m + \frac{1}{4} = 0$.

631. Найдите корни уравнения:

а) $4x(x + 3) = 12x + 1$;

б) $3m = m\left(m + 2\frac{1}{3}\right)$;

в) $a(6a + 1) = 2a\left(2 - 2\frac{1}{2}a\right)$;

г) $3(1 - 5k^2) = 2(1 - 6k^2)$;

д) $(2p - 3)(2p + 3) = 7$;

е) $(3y + 2)^2 = 4(y + 1)$;

ж) $(7x - 2)(x + 2) = (3x - 1)(3x + 5)$;

з) $\left(\frac{1}{2}m + 4\right)(2m - 4) = 3m(m + 2) - 16$.

632. Решите уравнение:

а) $6m^2 - (2m - 1)^2 = m(m + 4)$;

б) $(3a + 1)^2 - 10 = (a + 3)(a - 3)$;

в) $(4x - 3)^2 - (3x - 4)^2 = 7$;

г) $10m + (2 - m)^2 = 63 - (3 - m)^2$;

д) $(2p + 3)^2 + (2p - 3)^2 + (p - 6)(p + 6) = p^2$;

е) $(x + 4)(x + 3) + (x - 2)(x + 2) = 2(3x + 4)$.

633. Решите уравнение:

а) $\sqrt{x^2 - 16} = 3$; в) $\sqrt{2x^2 + 1} = \sqrt{3}$;

б) $\sqrt{3x^2 + 1} = \sqrt{13}$; г) $\sqrt{25 - 12x^2} = 1$.

634. Решите уравнение, введя новую переменную:

а) $2x - \sqrt{x} = 0$; в) $\sqrt{x} + 3x = 0$;

б) $2x - 2 - 3\sqrt{x - 1} = 0$; г) $2\sqrt{2x - 3} + 6x - 9 = 0$.

635. Выразите переменную x из уравнения:

а) $4x^2 - 2xy = 0$; в) $2x^2 - 3y^2 = 0$;

б) $2x^2 - 4xy^2 = 0$; г) $y + y^2 + x^2 = 0$.

636. Решите относительно r уравнение:

а) $\pi r^2 = S$; б) $\pi r^2 h = V$.

637. Одно из натуральных чисел меньше другого на 3, а их произведение больше утроенного первого числа на 25. Найдите эти числа.

638. Один катет прямоугольного треугольника в 3 раза больше другого. Площадь квадрата, построенного на гипотенузе, равна площади прямоугольника, длина которого 40 см, а ширина равна меньшему катету. Найдите длины катетов.

639. Если радиус круга увеличить в 2 раза, затем уменьшить на 1 см, то его площадь увеличится на π см^2. Найдите радиус круга.

Упражнения для повторения

640. Выделите квадрат суммы или квадрат разности из квадратного трехчлена:

а) $m^2 - 3m + 2{,}5$; в) $x^2 - 4x + c$;

б) $p^2 + 5p - 8$; г) $x^2 + 6x - c$.

641. Найдите значение выражения:

а) $\dfrac{x + 6\sqrt{x} + 9}{\sqrt{x} + 3}$ при $x = 0{,}25$ и при $x = 0{,}36$;

б) $\dfrac{y - 3\sqrt{y} + 2{,}25}{\sqrt{y} - 1{,}5}$ при $y = 1{,}44$ и при $y = 4{,}41$.

642. Верно ли, что является рациональным числом значение выражения:

а) $\left(\sqrt{8 - 3\sqrt{2}} - \sqrt{8 + 3\sqrt{2}}\right)^2$;

б) $\left(\sqrt{5 - 2\sqrt{3}} + \sqrt{5 - 2\sqrt{3}}\right)^2$?

28. Формулы корней квадратного уравнения

Решим квадратное уравнение $3x^2 - 2x - 1 = 0$.

Разделив обе части уравнения на 3, получим равносильное ему квадратное уравнение $x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{1}{3} = 0$.

Выделим из квадратного трехчлена $x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$ в левой части получившегося уравнения квадрат разности:

$$x^2 - 2x \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{9} - \frac{1}{3} = 0,$$

$$\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{4}{9} = 0.$$

Решим получившееся уравнение относительно $x - \frac{1}{3}$:

$$\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4}{9},$$

$$x - \frac{1}{3} = -\frac{2}{3} \text{ или } x - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Отсюда

$$x = -\frac{1}{3} \text{ или } x = 1.$$

Значит, корнями уравнения являются числа $-\frac{1}{3}$ и 1.

Таким же способом решим квадратное уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0. \qquad (1)$$

Разделим правую и левую части уравнения (1) на a, получим равносильное ему уравнение

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Выделим из квадратного трехчлена $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$ квадрат суммы:

$$x^2 + 2x \cdot \frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0,$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0.$$

Отсюда

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a},$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}. \qquad (2)$$

Числитель дроби $\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$, т. е. выражение $b^2 - 4ac$, называют *дискриминантом квадратного уравнения* $ax^2 + bx + c = 0$ (от лат. *discriminare*, что означает *различать*). Его обозначают буквой D. Значит,

$$D = b^2 - 4ac.$$

Используя обозначение дискриминанта, уравнение (2) можно записать в виде

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{D}{4a^2}. \qquad (3)$$

Знаменатель дроби $\frac{D}{4a^2}$ положителен, так как по определению квадратного уравнения $a \neq 0$. Поэтому лишь от D зависит, какие значения (положительные, нуль или отрицательные) принимает эта дробь. Рассмотрим отдельно каждый случай.

1) Если $D > 0$, то $\frac{D}{4a^2} > 0$. В этом случае при решении неполного квадратного уравнения (3) относительно $x + \frac{b}{2a}$ получаем:

$$x + \frac{b}{2a} = \sqrt{\frac{D}{4a^2}} \text{ или } x + \frac{b}{2a} = -\sqrt{\frac{D}{4a^2}}.$$

Отсюда

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{D}}{2a} \text{ или } x + \frac{b}{2a} = -\frac{\sqrt{D}}{2a},$$

$$x = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{D}}{2a} \text{ или } x = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{D}}{2a},$$

$$x = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \text{ или } x = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}.$$

Следовательно, уравнение (1) в этом случае имеет два корня: $x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$ и $x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$.

Применяется краткая запись: $x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$.

Равенство

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \text{ где } D = b^2 - 4ac,$$

называют *основной формулой корней квадратного уравнения.*

2) Если $D = 0$, то $\frac{D}{4a^2} = 0$. В этом случае при решении неполного квадратного уравнения (3) относительно $x + \frac{b}{2a}$ получаем:

$$x + \frac{b}{2a} = 0.$$

Отсюда

$$x = -\frac{b}{2a}.$$

Следовательно, уравнение (1) в этом случае имеет один корень $-\frac{b}{2a}$. Этот корень можно получить по основной формуле корней квадратного уравнения. При $D = 0$ она дает:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{0}}{2a},$$

$$x = -\frac{b}{2a}.$$

3) Если $D < 0$, то $\frac{D}{4a^2} < 0$. В этом случае как уравнение (3), так и уравнение (1) не имеют корней.

По дискриминанту квадратного уравнения определяют, сколько оно имеет корней:

если $D > 0$, то уравнение имеет два корня;

если $D = 0$, то уравнение имеет один корень;

если $D < 0$, то уравнение не имеет корней.

Итак, чтобы решить квадратное уравнение, надо:

1) вычислить дискриминант и сравнить его с нулем;

2) если дискриминант больше нуля или равен нулю, то произвести вычисления по формуле и написать ответ;

3) если дискриминант меньше нуля, то написать ответ.

Пример 1. Решим уравнение $6x^2 - x - 2 = 0$.

Коэффициенты уравнения $a = 6$, $b = -1$, $c = -2$. Вычислим дискриминант:

$$D = (-1)^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-2) = 1 + 48 = 49,\ D > 0.$$

Применим формулу корней квадратного уравнения:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 6},$$

$$x = \frac{1 \pm 7}{12},$$

$$x_1 = \frac{2}{3},\ x_2 = -\frac{1}{2}.$$

Ответ: $\frac{2}{3}$; $-\frac{1}{2}$.

Пример 2. Решим уравнение $4x^2 - 12x + 9 = 0$.

Вычислим дискриминант:

$$D = (-12)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9 = 144 - 144 = 0,\ D = 0.$$

Применим формулу корней квадратного уравнения:

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 4},$$

$$x = \frac{3}{2}.$$

Ответ: $1\frac{1}{2}$.

Пример 3. Решим уравнение $3x^2 + 6x + 5 = 0$.

Вычислим дискриминант:

$$D = 36 - 4 \cdot 3 \cdot 5 = 36 - 60,\ D < 0.$$

Ответ: корней нет.

Из основной формулы корней квадратного уравнения $x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ можно получить дополнительную формулу, по которой проще вычислять корни квадратного уравнения с четным вторым коэффициентом.

Разделим числитель и знаменатель дроби $\frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ на 2, получим:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{D}}{a} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}D}}{a}.$$

Итак, корни квадратного уравнения, в котором второй коэффициент — четное число, проще вычислять по формуле

$$x = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}D}}{a}, \text{ где } \frac{1}{4}D = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac.$$

Если в квадратном уравнении второй четный коэффициент обозначить $2k$, то уравнение примет вид $ax^2 + 2kx + c = 0$. Тогда для решения этого уравнения удобнее использовать формулу для вычисления дискриминанта: $D_1 = k^2 - ac$, где $D_1 = \frac{1}{4}D$. В этом случае формула корней квадратного уравнения будет выглядеть так:

$$x = \frac{-k \pm \sqrt{D_1}}{a}.$$

Эту формулу называют *формулой корней квадратного уравнения со вторым четным коэффициентом.*

Пример 4. Решим уравнение $3x^2 - 16x + 5 = 0$.

Второй коэффициент -16 — четное число. Применим дополнительную формулу корней:

$$\frac{1}{4}D = (-8)^2 - 3 \cdot 5 = 49,$$

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{49}}{3}, \quad x = \frac{8 \pm 7}{3},$$

$$x_1 = 5, \; x_2 = \frac{1}{3}.$$

Ответ: 5; $\frac{1}{3}$.

643. Сколько корней имеет уравнение:

а) $4x^2 + x - 8 = 0$; г) $x^2 + 6x + 7 = 0$;
б) $9x^2 - 6x + 1 = 0$; д) $-9x^2 + 10x - 3 = 0$;
в) $2x^2 + 5x + 6 = 0$; е) $16x^2 - 40x + 25 = 0$?

644. Решите уравнение:

а) $2x^2 - 5x - 3 = 0$; д) $y^2 + 4y + 4 = 0$;
б) $3x^2 + 13x + 4 = 0$; е) $3m^2 - 4m + 3 = 0$;
в) $6y^2 - y - 1 = 0$; ж) $4y^2 = 2 - 7y$;
г) $9x^2 - 30x + 25 = 0$; з) $p^2 = p + 90$.

645. Найдите корни уравнения:

а) $5x^2 + 5x + 1 = 0$; д) $-2m^2 + 11m - 10 = 0$;
б) $x^2 = 2x + 2$; е) $y^2 - 2y - 7 = 0$;
в) $-3z^2 + z + 1 = 0$; ж) $3x^2 + 11x + 6 = 0$;
г) $6 + 7x = 3x^2$; з) $15 + 17a = 4a^2$.

646. Решите уравнение:

а) $6x^2 - 13x + 2 = 0$; г) $x^2 + 4x - 1 = 0$;
б) $4y^2 + 36y = -81$; д) $8p^2 - p - 3 = 0$;
в) $9m^2 - 7m + 10 = 0$; е) $20y = 3y^2 + 20$.

647. Найдите значения x, при которых равно нулю значение трехчлена:

а) $100x^2 - 80x - 33$; б) $6x^2 - 25x + 4$.

648. Решите уравнение:

а) $3m^2 + 2m = 8$; д) $5x^2 - 3x = 5x + 4$;
б) $x^2 + 12x = -35$; е) $17z^2 - 20z = 8z^2 - 3$;
в) $5y^2 - 8y + 2 = -1$; ж) $35x + 7 = 1 - 50x^2$;
г) $4m^2 - 2m - 3 = 2$; з) $40y^2 - 4 = 35y - 10y^2$.

649. Найдите корни уравнения:

а) $49x^2 - 28x - 3 = -7$; г) $11m^2 + 12 = 25m - m^2$;
б) $12x^2 + 11x - 2 = 3$; д) $25y^2 - 12 = 10 + 5y$;
в) $6y^2 + 19y = 2y - 12$; е) $50x^2 + 11x = -28 - 50x^2$.

650. При каких значениях переменной значение выражения:

а) $-7x^2 - 38x - 14$ равно -1;
б) $16x^2 + 10x - 21$ равно 5;
в) $4x^2 - 21x + 20$ равно -7;
г) $9x^2 + 9x + 4$ равно 2?

651. Найдите значения переменной, при которых равны значения многочленов:

а) $5x^2 + 17x - 2$ и $3x - 11$;
б) $7x^2 - 11x - 2$ и $-4x^2 + 2x - 5$;
в) $3x^2 - 2$ и $-3x^2 + 6x - 1$;
г) $4x + 4$ и $-10x^2 + 17x$.

652. Решите уравнение:

а) $x(5x - 3) = 3\left(2x - 1\frac{1}{3}\right)$;
б) $(2x + 1)(x - 3) = x(4 - x) - 9$;
в) $(3x - 2)(3x + 2) = 4x(x - 1)$;
г) $(1 - 2x)(2x + 1) = -2x(3x + 1) + 2$;
д) $(2m + 3)^2 = (m - 1)(m + 1)$;
е) $5a(a + 1) = (3a - 2)^2$;
ж) $(2p + 3)^2 - (p - 1)^2 = -8$;
з) $3(2x - 1)^2 = 7x^2 + 12$.

653. Найдите корни уравнения:

а) $(2x - 1)(x + 5) - (x + 1)(x + 2) = 0$;
б) $(3x + 1)(3x - 1) = 8x - 2$;
в) $(2x + 1)^2 = (1 + 3x)(3x - 1)$;
г) $(3 - m)^2 = 4m(m - 3) - 15$.

654. Решите уравнение:

а) $\frac{x}{3} - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{6} = \frac{3x}{2} - \frac{4x^2}{3}$;

б) $\frac{m^2}{5} - \frac{m}{10} = \frac{2m^2}{5} + \frac{3m}{10} - \frac{3}{5}$;

в) $\frac{5y^2}{8} - y = \frac{3y}{4} - y^2 - \frac{1}{8}$;

г) $\frac{5n^2}{6} - \frac{4n}{9} = n + 21\frac{1}{3}$;

д) $\frac{3x^2 - 2}{2} - 8x = 21$;

е) $m(4m + 1) = \frac{5m^2 + 1}{3}$;

ж) $\frac{7k - 5}{4} = \frac{4k^2 - 3}{2}$;

з) $\frac{6y + 1}{6} - \frac{4y^2 - 3}{4} = \frac{7}{6}$.

655. При каких значениях переменной верно равенство:

а) $0{,}5(m + 1{,}5) = \left(\frac{1}{2}m + 1\right)^2$;

б) $(0{,}6x - 0{,}2)(0{,}6x + 0{,}2) = 0{,}24x - 0{,}08$?

656. Решите уравнение:

а) $\frac{5}{6}x - \frac{4}{9}x^2 = \frac{1}{3}x - 5\frac{1}{2}$;

б) $\frac{1}{30}x^2 - \frac{1}{15}x = \frac{3}{10}x + 19$;

в) $(0{,}3m + 2)^2 - 2m = 0{,}8m - 3$;

г) $\frac{5x}{4} - \frac{3x^2}{8} = \frac{x}{2} - 9$;

д) $\frac{3m^2-4}{8} - \frac{2m+3}{12} = \frac{m}{3} - \frac{1}{4}$;

е) $\frac{4y^2+3}{15} - \frac{2y}{5} = \frac{5-2y}{10} - \frac{1}{3}$.

657. При каких значениях q уравнение $x^2 - 2\sqrt{2}x + q + 1 = 0$ имеет различные корни?

658. Докажите, что уравнение $x^2 + (2m + 1)x + 2n + 1 = 0$ не имеет рациональных корней, если $m \in \boldsymbol{Z}$ и $n \in \boldsymbol{Z}$.

659. При каких натуральных значениях x значение дроби $\frac{5x^2 - 8}{4}$ равно значению квадратного трехчлена $2x^2 - 5x + 5$?

660. Найдите приближенные значения корней уравнения с точностью до 0,01:

а) $3x^2 + 2x - 2 = 0$; б) $\frac{3m^2 - 7m}{3} = 2\left(m + 2\frac{1}{6}\right)$.

661. При каких значениях переменной:

а) значение дроби $\frac{2x^2 + 3x}{6}$ больше соответствующего значения дроби $\frac{5x - 1}{8}$ на $3\frac{1}{2}$;

б) значение дроби $\frac{5x^2 - 4}{10}$ в $4\frac{2}{3}$ раза меньше соответствующего значения дроби $\frac{4x + 3}{15}$?

662. Выразите переменную x из уравнения:

а) $x^2 - 5bx + 6b^2 = 0$; в) $x^2 - bx - 6b^2 = 0$;

б) $2x^2 + 5bx + 3b^2 = 0$; г) $3x^2 + bx - 2b^2 = 0$.

663. Решите относительно x уравнение

$$(x - 1)(x - 3) = (a - 1)(a - 3).$$

664. Докажите, что если уравнение $x^2 + px + q = 0$, где $p \in Z$ и $q \in Z$, имеет целые корни, то они являются делителями свободного члена.

665. Если $p_1p_2 = 2(q_1 + q_2)$, то хотя бы одно из уравнений $x^2 + p_1x + q_1 = 0$ и $x^2 + p_2x + q_2 = 0$ имеет корень.

666. Докажите, что если уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ и $bx^2 + cx + a = 0$ имеют общий корень, то он равен 1.

667. Найдите значение m, при котором уравнения $x^2 - (2m + 1)x + m + 1 = 0$ и $2x^2 - (4m - 1)x + 1 = 0$ имеют общий корень.

Упражнения для повторения

668. Упростите выражение:

а) $(2\sqrt{3} - 3\sqrt{2})(3\sqrt{2} + 2\sqrt{3})$;

б) $(5\sqrt{5} + 1)^2 - 10\sqrt{5}$;

в) $(a\sqrt{2} - \sqrt{3})^2 - 2a^2$;

г) $(3\sqrt{6} + 2\sqrt{3})(3\sqrt{6} - 2\sqrt{3})$.

669. Найдите значение выражения:

а) $\left(\frac{m}{n} - 2 + \frac{n}{m}\right) : \left(\frac{n}{m^2 + mn} - \frac{2}{m + n} + \frac{m}{n^2 + mn}\right)$

при $m = \frac{3}{10}$ и $n = -\frac{4}{15}$;

б) $\left(1 - \frac{1}{a - 1} + \frac{1}{a + 1}\right)(a^2 - 1)$ при $a = 1\frac{1}{2}$.

670. Если к трехзначному числу справа приписать такое же число, то получится шестизначное число, кратное 7, 11 и 13. Докажите.

29. Уравнения, сводящиеся к квадратным

Некоторые уравнения удается решить, используя метод введения новой переменной. Рассмотрим примеры.

Пример 1. Решим уравнение $16x^4 - 65x^2 + 4 = 0$.

В это уравнение переменная x входит только во второй и в четвертой степени. Так как $x^4 = (x^2)^2$, то уравнение можно свести к квадратному, обозначив x^2 буквой y. Получим

$$16y^2 - 65y + 4 = 0.$$

Решив это уравнение, найдем, что $y_1 = \frac{1}{16}$ и $y_2 = 4$. Возвращаясь к переменной x, получим уравнения $x^2 = \frac{1}{16}$ и $x^2 = 4$, корнями которых являются числа $\frac{1}{4}$, $-\frac{1}{4}$, 2 и -2.

Ответ: $\frac{1}{4}$; $-\frac{1}{4}$; 2; -2.

Уравнение $16x^4 - 65x^2 + 4 = 0$ имеет вид $ax^4 + bx^2 + c = 0$, где $a \neq 0$. Уравнения такого вида называют *биквадратными*. Дополнение «би» (от лат. *bis* — дважды) связано с тем, что такое уравнение является квадратным относительно квадрата переменной x. Биквадратное уравнение можно решить, используя подстановку $y = x^2$. Подсказкой для такой подстановки является само уравнение.

В некоторых других случаях уравнения также удается решить с помощью введения новой переменной, но найти подстановку бывает сложнее.

Пример 2. Решим уравнение

$$x(x + 0{,}5)(x + 1{,}5)(x + 2) = 31{,}5.$$

Если записать его в стандартном виде, то получится уравнение

$$x^4 + 4x^3 + 4{,}75x^2 + 1{,}5x - 31{,}5 = 0,$$

для которого трудно найти какой-либо способ решения.

Поступим иначе. Заменим многочленом произведение первого и четвертого множителей, а также второго и третьего. Получим:

$$(x^2 + 2x)(x^2 + 2x + 0{,}75) = 31{,}5.$$

В левой части дважды встречается выражение $x^2 + 2x$, причем переменная x ни в какое другое выражение не входит. Введем новую переменную $y = x^2 + 2x$. Тогда уравнение сводится к уравнению с переменной y:

$$y(y + 0{,}75) = 31{,}5.$$

Упростив его, получим:

$$y^2 + 0{,}75y - 31{,}5 = 0,$$
$$4y^2 + 3y - 126 = 0.$$

Решив это уравнение, найдем:

$$y_1 = -6,\ y_2 = 5{,}25.$$

Подставив найденные значения y в равенство $y = x^2 + 2x$:

$$x^2 + 2x = -6 \text{ или } x^2 + 2x = 5{,}25.$$

Уравнение $x^2 + 2x = -6$ не имеет корней, а уравнение $x^2 + 2x = 5{,}25$ имеет два корня: $x_1 = -3{,}5$ и $x_2 = 1{,}5$.

Итак, исходное уравнение имеет два корня: $-3{,}5$ и $1{,}5$.

Ответ: $-3{,}5$; $1{,}5$.

671. Решите биквадратное уравнение:

а) $x^4 + 7x^2 - 8 = 0$;
б) $x^4 - 17x^2 + 16 = 0$;
в) $2x^4 - 17x^2 + 35 = 0$;
г) $4x^4 - 13x^2 + 3 = 0$;
д) $16y^4 + 15y^2 - 1 = 0$;
е) $y^4 + 2y^2 + 6 = 0$.

672. При каких значениях переменной равно нулю значение трехчлена:

а) $x^4 - 13x^2 + 36$;
б) $y^4 - 12y^2 + 27$;
в) $-p^4 + p^2 - 0{,}25$;
г) $4x^4 - 5x^2 + 1$;
д) $x^4 - 2{,}5x^2 - 6$;
е) $2y^4 - 17y^2 - 9$?

673. Найдите координаты точек пересечения с осями координат графика функции:

а) $y = x^4 - 10x^2 + 9$;
б) $y = 4x^4 - 17x^2 + 4$;
в) $y = x^4 - 9x^2$;
г) $y = x^4 + 4x^2$.

674[1]. Решите уравнение:

а) $x^2 - 3 \cdot |x| - 4 = 0$;
б) $2x^2 - 3 \cdot |x| + 1 = 0$;
в) $x^2 + 4 \cdot |x| + 3 = 0$;
г) $\dfrac{3}{x^2} - \dfrac{2}{x} - 1 = 0$;
д) $3 \cdot \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x} - 4 = 0$;
е) $\dfrac{1}{x^2} + 2 \cdot \dfrac{1}{x} = 1\dfrac{1}{4}$.

[1] Последнее уравнение данного упражнения составлено персидским ученым Омаром Хайямом (1048—1122).

675[1]. Решите уравнение с помощью введения новой переменной:

а) $x^4 + 5x^2 = 126$; в) $x^4 = 2x^2 + 8$;
б) $x^4 + 24 = 10x^2$; г) $x^7 = bx^5 + cx^3$.

676. Найдите корни уравнения:

а) $(x^2 - 1)^2 - 18(x^2 - 1) + 45 = 0$;
б) $(x^3 + 1)^2 - 10(x^3 + 1) + 9 = 0$.

677. Решите уравнение методом введения новой переменной:

а) $(x^2 + 2x)^2 - 5(x^2 + 2x) - 24 = 0$;
б) $(x^2 - x)^2 - 15(x^2 - x) - 100 = 0$;
в) $3(x^2 + x)^2 - 10x^2 - 10x = 48$;
г) $(y^2 - 2y)^2 - 4y^2 + 8y + 3 = 0$.

678. Найдите удобную замену переменной и решите уравнение:

а) $(x^2 + 3x - 20)(x^2 + 3x + 2) = 240$;
б) $(x^2 - x + 8)(x^2 - x - 6) = 120$.

679. Найдите корни уравнения:

а) $(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) = 840$;
б) $x(x - 2)(x - 4)(x - 6) - 105 = 0$;
в) $(x + 4)(x + 6)(x + 8)(x + 10) = 5760$;
г) $(y - 2)(y - 3)(y - 4)(y - 5) - 360 = 0$.

680. Решите уравнение, используя введение новой переменной:

а) $(x^2 + 4x)^2 - (x + 2)^2 = 416$;
б) $(x^2 - 2x)^2 + (x - 1)^2 = 73$;
в) $(x^2 + 6x)^2 - 4(x + 3)^2 = 156$;
г) $3(x^2 + 2x)^2 = 35(x + 1)^2 + 115$.

Упражнения для повторения

681. Найдите наибольшее и наименьшее целые значения переменной x, при которых дробь $\frac{x-8}{100}$ является правильной, а дробь $\frac{x+8}{50}$ — неправильной.

[1] Уравнения этого упражнения составлены арабским ученым XI в. ал-Кархи.

682. При каких значениях параметров a и b решением системы $\begin{cases} 2x - y = a, \\ bx - y = 1 \end{cases}$ является пара чисел (4; 5)?

683. В конце учебного года 11 учеников 8-го класса сдавали норматив по бегу на 100 метров. Зафиксированные результаты (в секундах) представлены в таблице.

Данила	15,3	Стас	16,1	Паша	14,7
Петя	16,9	Аня	25,1	Наташа	20,2
Лена	21,8	Оля	19,9	Миша	15,4
Катя	18,4	Боря	15,5		

Найдите медиану показанных учениками результатов.

30. Решение задач с помощью квадратных уравнений

Во многих случаях при составлении уравнений по условиям задач получаются квадратные уравнения или уравнения, сводящиеся к квадратным. Такие задачи часто встречаются в математике, физике, технике.

Решение задач с помощью уравнений сводится, как известно, к трем основным этапам:

— обозначить неизвестное число буквой и составить уравнение;

— решить уравнение;

— истолковать результат в соответствии с условием задачи.

Рассмотрим примеры.

Задача 1. Гипотенуза прямоугольного треугольника больше одного из катетов в $1\frac{1}{4}$ раза. А этот катет больше другого катета на 10 см. Найдите больший катет.

Решение. Пусть больший катет равен x см. Тогда гипотенуза равна $1\frac{1}{4}x$ см, меньший катет равен $(x - 10)$ см. По теореме Пифагора сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы, т. е.

$$x^2 + (x - 10)^2 = \left(1\frac{1}{4}x\right)^2.$$

Решим уравнение:

$$x^2 + x^2 - 20x + 100 = \frac{25}{16}x^2,$$

$$32x^2 - 320x + 1600 = 25x^2,$$

$$7x^2 - 320x + 1600 = 0,$$

$$\frac{1}{4}D = 160^2 - 7 \cdot 1600 = 14\,400,$$

$$x = \frac{160 \pm 120}{7},$$

$$x_1 = 40,\ x_2 = 5\frac{5}{7}.$$

По условию задачи значение x должно быть больше 10. Этому условию удовлетворяет лишь первый корень — число 40.

Ответ: 40 см.

Задача 2. Через какое время тело, брошенное вертикально вверх со скоростью 30 м/с, окажется на высоте 40 м (без учета сопротивления воздуха)?

Решение. Воспользуемся формулой

$$h = v_0 t - \frac{gt^2}{2},$$

где h (в м) — высота, которой достигает тело через t с, v_0 (в м/с) — начальная скорость и g (в м/с^2) — ускорение свободного падения, приближенно равное 10 м/с^2. Подставляя в эту формулу вместо переменных h, v_0 и g их значения, получим уравнение

$$40 = 30t - 5t^2.$$

Отсюда

$$5t^2 - 30t + 40 = 0,$$

$$t^2 - 6t + 8 = 0.$$

По дополнительной формуле корней квадратного уравнения найдем:

$$t = \frac{3 \pm 1}{1},$$

$$t_1 = 4,\ t_2 = 2.$$

Ответ: 2 с и 4 с.

Заметим, что оба результата 2 с и 4 с удовлетворяют условиям задачи. Первый раз тело окажется на высоте 40 м во время

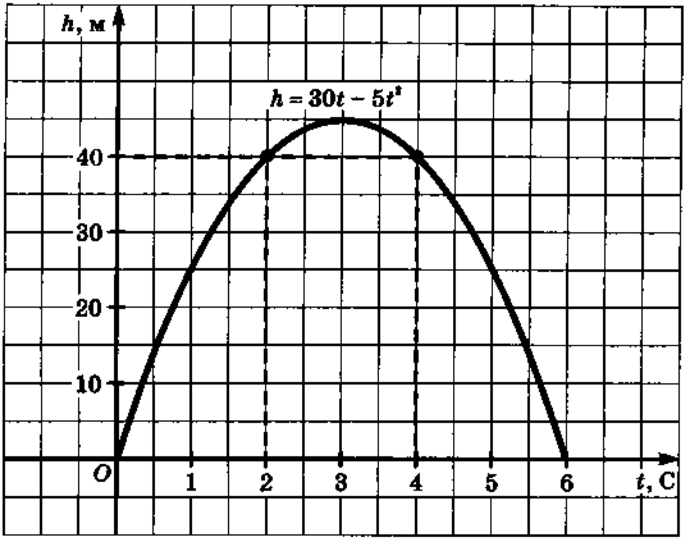


Рис. 37

его подъема через 2 с после момента бросания. Второй раз оно будет на той же высоте через 4 с, но уже во время падения. Иллюстрацию решения дает график зависимости h от t, выраженной формулой $h = 30t - 5t^2$ (рис. 37).

684. Площадь прямоугольника, длина которого на 5 см больше ширины, равна 126 см^2. Найдите стороны прямоугольника.

685. Найдите периметр прямоугольника, одна сторона которого на 3 см меньше другой, а его диагональ равна 15 см.

686. Квадрат, площадь которого равна 961 см^2, разбит на два прямоугольника. Ширина одного из них на 3 см больше ширины другого. Найдите периметр каждого прямоугольника.

687. На облицовку стены пошло 504 плитки. Причем в каждом ряду плиток было на 3 меньше, чем число рядов. Сколько было рядов?

688. Длина прямоугольника на 2 м больше его ширины. Если ширину увеличить на 3 м, а длину на 8 м, то площадь увеличится в 3 раза. Найдите стороны прямоугольника.

689. Радиус одной из двух окружностей, имеющих общий центр, на 5 см больше радиуса другой. Площадь кольца, заключенного между этими окружностями, составляет 1,25 площади малого круга. Найдите радиусы окружностей.

690. Изготовили 185 деталей. Их разложили поровну в несколько больших ящиков и 9 деталей положили в маленький ящик. В каждый большой вошло деталей на 5 меньше, чем было больших ящиков. Сколько было больших ящиков?

691. Сумма квадратов двух последовательных нечетных натуральных чисел равна 290. Найдите эти числа.

692. Произведение двух последовательных чисел, кратных 3, на 18 больше учетверенного большего из этих чисел. Найдите эти числа.

693. При розыгрыше первенства школы по волейболу была проведена 21 игра, причем каждая команда сыграла с каждой из остальных команд один раз. Сколько команд участвовало в розыгрыше?

694. Если число сторон выпуклого многоугольника удвоить, то число его диагоналей увеличится на 30. Найдите число сторон этого многоугольника.

695. В старшем разряде двузначного числа на одну единицу больше, чем в младшем. Если это число умножить на число, полученное перестановкой его цифр, то получится 736. Найдите двузначное число.

696. Дано двузначное число с одинаковыми цифрами. Если в старший разряд добавить одну единицу, а в младший две и полученное число умножить на данное, то произведение будет равно 2464. Найдите данное число.

697. Сколько вершин имеет выпуклый многоугольник, в котором диагоналей на 25 больше, чем сторон?

698. Бак наполнен спиртом. Из него вылили часть спирта и его дополнили водой. Потом из бака вылили столько же литров смеси. В баке осталось 49 л спирта. Сколько литров спирта вылили в первый раз и сколько во второй раз, если вместимость бака 64 л?

699. Имеется два тридцатилитровых сосуда, в которых содержится всего 30 л спирта. Первый сосуд доливают доверху водой и полученной смесью дополняют второй сосуд, из которого затем переливают 12 л новой смеси в первый. Сколько литров спирта было сначала в каждом сосуде, если во втором оказалось на 2 л спирта меньше, чем в первом?

Упражнения для повторения

700. Сократите дробь:

а) $\dfrac{2ab+2by+ay+y^2}{2ab-2by+ay-y^2}$; б) $\dfrac{9x^2+6x+4}{27x^3-8}$.

701. Найдите координаты точек пересечения с осями координат графика функции:

а) $y = 7x + 1{,}4$; б) $y = 2x^2 + 9x - 5$.

702. Упростите выражение:

а) $\dfrac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2 - x}{\sqrt{y}\left(\sqrt{y}-2\sqrt{x}\right)}$; б) $\dfrac{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}{a+\sqrt{ab}+b}$.

Контрольные вопросы и задания

1. Сформулируйте определение квадратного уравнения.
2. Какие квадратные уравнения называются неполными? Приведите примеры неполных квадратных уравнений.
3. Сформулируйте определение дискриминанта квадратного уравнения. Сколько корней может иметь квадратное уравнение?
4. Напишите основную формулу корней квадратного уравнения.
5. Напишите формулу корней квадратного уравнения со вторым четным коэффициентом.

§ 10. СВОЙСТВА КОРНЕЙ КВАДРАТНОГО УРАВНЕНИЯ

31. Теорема Виета

Особого внимания заслуживают квадратные уравнения, в которых первый коэффициент равен единице. Такие уравнения называются *приведенными*. Если в приведенном квадратном уравнении обозначить второй коэффициент буквой p, а свободный член буквой q, то уравнение будет иметь вид

$$x^2 + px + q = 0.$$

Из основной формулы корней квадратного уравнения можно получить более простую формулу корней приведенного квадратного уравнения:

$$x = \frac{-p \pm \sqrt{D}}{2}, \text{ где } D = p^2 - 4q.$$

Рассмотрим свойства корней приведенного квадратного уравнения.

Решим уравнение $(x - 3)(x - 5) = 0$. Левая часть уравнения есть произведение двух множителей $x - 3$ и $x - 5$. Так как это произведение равно нулю, то

$$x - 3 = 0 \text{ или } x - 5 = 0.$$

Значит, $x_1 = 3$, $x_2 = 5$.

Раскроем скобки в левой части уравнения и приведем подобные слагаемые:

$$x^2 - 3x - 5x + 15 = 0,$$
$$x^2 - 8x + 15 = 0.$$

Раскрывая скобки и приводя подобные слагаемые, замечаем, как в этом квадратном уравнении образуется второй коэффициент и свободный член. Второй коэффициент получается при сложении чисел, противоположных корням уравнения, а свободный член — при умножении корней. Этим свойством обладают корни любого приведенного квадратного уравнения.

Свойство корней приведенного квадратного уравнения выражается теоремой, названной *теоремой Виета* по имени знаменитого французского математика Франсуа Виета (1540—1603).

Франсуа Виет (1540—1603), французский математик, по профессии юрист; ввел буквенные обозначения не только для неизвестных величин, но и для коэффициентов уравнения («Введение в аналитическое искусство», 1591). Ему принадлежит установление единообразного приема решения уравнений 2, 3 и 4-й степеней. Виет получил существенные результаты в тригонометрии, астрономии, криптографии; с появлением его работ в научных кругах Европы стали использоваться десятичные дроби. Среди своих открытий Виет особенно высоко ценил установленную им зависимость между корнями и коэффициентами уравнений.

Теорема. ***Сумма корней приведенного квадратного уравнения равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену.***

Доказательство. Рассмотрим приведенное квадратное уравнение

$$x^2 + px + q = 0.$$

Если дискриминант этого уравнения больше нуля, то уравнение имеет два корня:

$$x_1 = \frac{-p-\sqrt{D}}{2} \text{ и } x_2 = \frac{-p+\sqrt{D}}{2}.$$

Найдем сумму корней:

$$x_1 + x_2 = \frac{-p-\sqrt{D}}{2} + \frac{-p+\sqrt{D}}{2} = \frac{-2p}{2} = -p.$$

Сумма корней равна $-p$, т. е. второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком:

$$x_1 + x_2 = -p.$$

Найдем произведение корней:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-p-\sqrt{D}}{2} \cdot \frac{-p+\sqrt{D}}{2} = \frac{(-p)^2-\left(\sqrt{D}\right)^2}{4} =$$

$$= \frac{p^2-D}{4} = \frac{p^2-(p^2-4q)}{4} = \frac{4q}{4} = q.$$

Произведение корней равно q, т. е. свободному члену:

$$x_1 x_2 = q.$$

Если дискриминант квадратного уравнения равен нулю, то уравнение имеет один корень. Его можно найти по формуле корней

$$x = \frac{-p \pm 0}{2}.$$

В дальнейшем в некоторых случаях целесообразно считать, что такое уравнение имеет не один, а два равных корня:

$$x_1 = \frac{-p+0}{2} = -\frac{p}{2},\ x_2 = \frac{-p-0}{2} = -\frac{p}{2}.$$

Тогда и в этом случае теорема Виета останется верной.

Сложив x_1 и x_2, получим $-p$:

$$x_1 + x_2 = -\frac{p}{2} - \frac{p}{2} = -p.$$

Перемножив x_1 и x_2, получим $\frac{p^2}{4}$. Но так как $D = p^2 - 4q = 0$, то $p^2 = 4q$, а поэтому

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{p^2}{4} = \frac{4q}{4} = q.$$

Пусть корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ равны x_1 и x_2. Разделив обе части этого уравнения на a ($a \neq 0$), получим равносильное ему приведенное квадратное уравнение $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$, имеющее те же корни.

По теореме Виета:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a},\ x_1x_2 = \frac{c}{a}.$$

Для приведенного квадратного уравнения справедлива теорема, обратная теореме Виета:

если числа m и n таковы, что их сумма равна $-p$, а произведение равно q, то эти числа являются корнями уравнения $x^2 + px + q = 0$.

Доказательство. Пусть $x^2 + px + q = 0$ — приведенное квадратное уравнение, а числа m и n такие, что $m + n = -p$ и $mn = q$. Подставив в это уравнение вместо p равное ему число $-(m + n)$, вместо q равное ему число mn, получим равносильное ему уравнение

$$x^2 - (m + n)x + mn = 0.$$

Преобразуем левую часть получившегося уравнения:

$$x^2 - mx - nx + mn = 0,$$
$$x(x - m) - n(x - m) = 0,$$
$$(x - m)(x - n) = 0.$$

Отсюда получаем:

$$x - m = 0 \text{ или } x - n = 0,$$
$$x_1 = m,\ x_2 = n.$$

Значит, числа m и n являются корнями уравнения

$$x^2 + px + q = 0.$$

Для не приведенного квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ теорема, обратная теореме Виета, формулируется так: *если числа m и n таковы, что $m + n = -\frac{b}{a}$ и $mn = \frac{c}{a}$, то эти числа являются корнями уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.*

Пример 1. Найдем сумму и произведение корней уравнения
$$\frac{1}{2}x^2 - 7x - 4 = 0.$$

Уравнение $\frac{1}{2}x^2 - 7x - 4 = 0$ имеет корни, так как
$$D = (-7)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot (-4) > 0.$$

Те же корни имеет и равносильное ему приведенное квадратное уравнение $x^2 - 14x - 8 = 0$, полученное при умножении обеих частей уравнения $\frac{1}{2}x^2 - 7x - 4 = 0$ на 2.

По теореме Виета:
$$x_1 + x_2 = 14, \ x_1x_2 = -8.$$

Пример 2. Выясним, верно ли решено уравнение $x^2 + 4x - 21 = 0$, если в ответе получились числа 3 и -7.

Сумма чисел 3 и -7 равна второму коэффициенту приведенного квадратного уравнения $x^2 + 4x - 21 = 0$, взятому с противоположным знаком, а их произведение равно свободному члену:
$$3 + (-7) = -4; \quad 3 \cdot (-7) = -21.$$

Значит, по теореме, обратной теореме Виета, числа 3 и -7 являются корнями уравнения $x^2 + 4x - 21 = 0$.

Пример 3. Составим квадратное уравнение, корнями которого были бы числа $-\frac{1}{2}$ и $-\frac{2}{3}$.

Найдем сумму и произведение чисел $-\frac{1}{2}$ и $-\frac{2}{3}$:
$$-\frac{1}{2} - \frac{2}{3} = -\frac{7}{6}, \quad -\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3}.$$

Напишем приведенное квадратное уравнение, в котором вторым коэффициентом является $\frac{7}{6}$, а свободным членом $\frac{1}{3}$:
$$x^2 + \frac{7}{6}x + \frac{1}{3} = 0.$$

По теореме, обратной теореме Виета, числа $-\frac{1}{2}$ и $-\frac{2}{3}$ являются корнями этого уравнения.

Уравнение $x^2 + \frac{7}{6}x + \frac{1}{3} = 0$ сохранит те же корни, если обе его части умножить, например, на 6:
$$6x^2 + 7x + 2 = 0.$$

Ответом для задания в примере будет либо приведенное квадратное уравнение $x^2 + \frac{7}{6}x + \frac{1}{3} = 0$, либо какое угодно равносильное ему неприведенное квадратное уравнение.

703. Запишите формулу корней приведенного квадратного уравнения, имеющего второй четный коэффициент.

704. Решите приведенное квадратное уравнение:

а) $x^2 - 8x + 15 = 0$; в) $x^2 + 13x + 42 = 0$;

б) $x^2 + 2x - 8 = 0$; г) $x^2 - 9x - 10 = 0$.

705. По теореме Виета найдите сумму и произведение корней уравнения (если эти корни существуют):

а) $x^2 + 9x - 10 = 0$; г) $-x^2 + 5x + 24 = 0$;

б) $m^2 - 1{,}1m - 0{,}6 = 0$; д) $40m^2 + 38m - 15 = 0$;

в) $t^2 + 42{,}5t + 100 = 0$; е) $54y^2 + 69y + 20 = 0$.

706. Найдите второй коэффициент и свободный член приведенного квадратного уравнения $y^2 - ky + t = 0$, если его корнями являются числа:

а) 10 и -6; б) -3 и -8; в) $\frac{2}{5}$ и $-\frac{1}{2}$; г) $-\frac{5}{8}$ и $\frac{11}{12}$.

707. При каких значениях y и z сумма корней уравнения $x^2 + 3x - 10 = 0$ равна $2y - z$, а их произведение равно $y + 2z$?

708. При каких условиях сумма корней приведенного квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$ равна их произведению?

709. В каких случаях сумма и произведение корней приведенного квадратного уравнения являются противоположными числами?

710. Среди пар чисел $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right)$, $(11; -7)$ и $\left(1\frac{1}{3}; -1\frac{1}{4}\right)$ найдите такую пару, которая составлена из корней уравнения:

а) $x^2 - 4x - 77 = 0$; в) $6x^2 - 5x + 1 = 0$;

б) $x^2 - \frac{5}{6}x + \frac{1}{6} = 0$; г) $12x^2 - x - 20 = 0$.

711. Решите уравнение по формуле корней и сделайте проверку по теореме, обратной теореме Виета:

а) $x^2 - 5x - 36 = 0$; в) $x^2 - 1\frac{1}{12}x - 1\frac{3}{8} = 0$;

б) $x^2 - 16x + 55 = 0$; г) $32x^2 + 44x + 15 = 0$.

712. Один из корней уравнения $x^2 + px + 54 = 0$ равен 6. Найдите другой корень и второй коэффициент.

713. Число $-\frac{2}{3}$ один из корней уравнения $9x^2 + 3x + q = 0$. Найдите другой корень и свободный член.

714. Уравнение $12x^2 + px + 1 = 0$ имеет одним из корней число $\frac{1}{4}$. Найдите другой корень и второй коэффициент.

715. Дано квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$. Его корни x_1 и x_2. Найдите:

а) x_1 и b, если $a = 1$, $x_2 = 14$ и $c = -140$;

б) x_1 и c, если $a = 1$, $x_2 = -30$ и $b = 18$;

в) x_1 и b, если $a = 10$, $x_2 = \frac{2}{5}$ и $c = 2$;

г) x_1 и c, если $a = 12$, $x_2 = -\frac{3}{4}$ и $b = 17$.

716. При каком значении c один из корней уравнения $4x^2 - 20x + c = 0$ на 2 меньше другого?

717. Найдите значение b, при котором один из корней уравнения $2x^2 - bx + 3 = 0$ в 6 раз больше другого?

718. Разность корней квадратного уравнения $x^2 - 4x + q = 0$ равна 20. Найдите q.

719. Один из корней квадратного уравнения $24x^2 - 10x + q = 0$ на $\frac{1}{12}$ больше другого. Найдите q.

720. Разность квадратов корней приведенного квадратного уравнения равна 24. Второй коэффициент этого уравнения равен 2. Найдите свободный член уравнения.

721. Не производя вычислений по формуле корней квадратного уравнения, определите знаки корней уравнения:

а) $x^2 - 17x + 4 = 0$;
б) $x^2 + 20x + 5 = 0$;
в) $x^2 + 30x - 1 = 0$;
г) $x^2 - 25x - 2 = 0$;
д) $3x^2 - 5x + 2 = 0$;
е) $2x^2 + 9x + 3 = 0$;
ж) $5x^2 + 10x - 4 = 0$;
з) $\frac{1}{6}x^2 - 11x - 8 = 0$.

722. Устно. Найдите корни уравнения:

а) $x^2 - 5x + 6 = 0$; в) $x^2 + 5x + 6 = 0$;
б) $x^2 - x - 6 = 0$; г) $x^2 + x - 6 = 0$.

723. Устно. Найдите корни уравнения:

а) $x^2 - (3 + a)x + 3a = 0$; в) $x^2 - (3 - a)x - 3a = 0$;
б) $x^2 + (3 + a)x + 3a = 0$; г) $x^2 + (3 - a)x - 3a = 0$.

724. Докажите, что ни при каком значении b корни уравнения:

а) $x^2 + bx - 3 = 0$ не могут иметь одинаковых знаков;
б) $2x^2 + bx + 5 = 0$ не могут иметь разных знаков.

725. Уравнения $x^2 + 2p_1x + q_1 = 0$ и $x^2 + 2p_2x + q_2 = 0$ таковы, что $q_1 + q_2 = 2p_1p_2$. Докажите, что если одно из них не имеет корней, то второе имеет корни.

726. Докажите, что если в уравнении $x^2 + px + q = 0$ коэффициенты p и q — целые числа и уравнение имеет рациональные корни, то эти корни — целые числа.

727. При каких значениях n:

а) один из корней уравнения $x^2 - 8x + 4n^2 - 1 = 0$ равен 0;
б) корни уравнения $x^2 + (2n - 7)x - 3 = 0$ являются противоположными числами;
в) корни уравнения $x^2 - 100x + 3n - 2 = 0$ являются взаимно обратными числами?

728. Сумма коэффициентов квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ равна нулю тогда и только тогда, когда один корень уравнения равен 1, а второй равен $\frac{c}{a}$. Докажите это утверждение.

729. Сумма старшего коэффициента и свободного члена квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ равна среднему коэффициенту тогда и только тогда, когда один корень уравнения равен -1, а второй равен $-\frac{c}{a}$. Докажите это утверждение.

730. Устно. Найдите корни уравнения:

а) $35x^2 - 59x + 24 = 0$; в) $78x^2 - 55x - 23 = 0$;
б) $138x^2 + 135x - 3 = 0$; г) $5{,}13x^2 + 6{,}2x + 1{,}07 = 0$.

731. Составьте приведенное квадратное уравнение, если его корнями являются:

а) 3 и 4; б) 3 и −4; в) −3 и 4; г) −3 и −4.

732. Составьте приведенное квадратное уравнение, если его корнями являются:

а) a и $2a$; б) a и $-2a$; в) $-a$ и $2a$; г) $-a$ и $-2a$.

733. Составьте приведенное квадратное уравнение с рациональными коэффициентами, если один из его корней равен:

а) $\sqrt{3}$; б) $\sqrt{3}-1$; в) $-\sqrt{5}$; г) $2-\sqrt{5}$.

Упражнения для повторения

734. Один катет прямоугольного треугольника на $\frac{1}{2}$ см больше другого. Гипотенуза равна 2,5 см. Найдите периметр треугольника.

735. Отношение диагонали прямоугольника к его длине равно 5 : 4. Ширина прямоугольника 6 см. Найдите его площадь.

736. Найдите значение квадратного трехчлена

$$\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{3}x-33 \text{ при } x=-9;\ -3;\ 0;\ 10;\ 11.$$

737. При каком значении a уравнения $x^2-ax+1=0$ и $x^2-x+a=0$ имеют общий корень?

738. Докажите, что если число $m-2\sqrt{k}$, где $m\in Z$ и $k\in N$, является корнем уравнения $x^2+px+q=0$, в котором p и q — рациональные числа, то число $m+2\sqrt{k}$ также является корнем этого уравнения.

32. Выражения, симметрические относительно корней квадратного уравнения

Рассмотрим выражения с двумя переменными

$$ab-a-b,\ (a-b)^2,\ \frac{a+b}{a^2+b^2}.$$

Если в каждом из них переставим переменные, т.е. всюду вместо a поставим b и вместо b поставим a, то получим тождественно равные им выражения:

$$ba - b - a = ab - a - b,$$
$$(b - a)^2 = (a - b)^2,$$
$$\frac{b+a}{b^2+a^2} = \frac{a+b}{a^2+b^2}.$$

Такие выражения называют *симметрическими* относительно входящих в них переменных.

Выражение с двумя переменными называется симметрическим относительно этих переменных, если при перестановке этих переменных получается тождественно равное ему выражение.

Например, симметрическими выражениями относительно двух переменных являются суммы и произведения натуральных степеней этих переменных, а также выражения, полученные из них с помощью сложения, вычитания, умножения и деления:

$$a + b,\ a^2 + b^2,\ a^3 + b^3,\ a^4 + b^4,\ \ldots,$$
$$ab,\ a^2b^2,\ a^3b^3,\ a^4b^4,\ \ldots,$$
$$ab(a^2 + b^2),\ \frac{a+b}{a^2+b^2},\ a^4b^4 + a^3b^3,\ a^4b^4 - (a^3 + b^3),\ \ldots .$$

Симметрическими выражениями являются также четные степени разности двух переменных. Нечетные степени разности двух переменных симметрическими выражениями не являются.

Наиболее простыми симметрическими выражениями относительно двух переменных являются сумма и произведение этих переменных, т. е. $a + b$ и ab. Через $a + b$ и ab можно выразить любое рациональное симметрическое выражение относительно a и b.

Для примера выразим симметрические относительно a и b выражения $(a - b)^2$ и $(a - b)^4$ через $a + b$ и ab:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 =$$
$$= a^2 + 2ab + b^2 - 4ab = (a + b)^2 - 4ab;$$
$$(a - b)^4 = ((a - b)^2)^2 = ((a + b)^2 - 4ab)^2.$$

Простейшие симметрические выражения относительно корней квадратного уравнения встречаются в теореме Виета. Это позволяет использовать их при решении некоторых задач, относящихся к квадратным уравнениям. Рассмотрим ряд примеров.

Пример 1. Квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет корни x_1 и x_2. Не решая этого уравнения, выразим через p и q суммы $x_1^2 + x_2^2$, $x_1^3 + x_2^3$ и $x_1^4 + x_2^4$.

Выражения $x_1^2 + x_2^2$, $x_1^3 + x_2^3$ и $x_1^4 + x_2^4$ — симметрические относительно x_1 и x_2. Выразим их через $x_1 + x_2$ и x_1x_2, а затем применим теорему Виета. Начнем с суммы квадратов корней:

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (-p)^2 - 2q = p^2 - 2q.$$

Используя полученный результат, выразим сумму кубов и сумму четвертых степеней корней:

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2) =$$
$$= -p(p^2 - 2q - q) = -p^3 + 3pq;$$
$$x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2x_2^2 = (p^2 - 2q)^2 - 2q^2 =$$
$$= p^4 - 4p^2q + 4q^2 - 2q^2 = p^4 - 4p^2q + 2q^2.$$

Пример 2. Не решая уравнения $x^2 + px + q = 0$, имеющего корни x_1 и x_2, выразим через p и q выражения $(x_1 - x_2)^2$ и $(x_1 - x_2)^4$.

Выражения $(x_1 - x_2)^2$ и $(x_1 - x_2)^4$ — симметрические относительно x_1 и x_2. Выразим их через $x_1 + x_2$ и x_1x_2, а затем применим теорему Виета:

$$(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = (-p)^2 - 4q = p^2 - 4q;$$
$$(x_1 - x_2)^4 = ((x_1 - x_2)^2)^2 = (p^2 - 4q)^2 = p^4 - 8p^2q + 16q^2.$$

Пример 3. Найдем такое значение q, при котором сумма квадратов корней уравнения $x^2 + x + q = 0$ равна 13.

Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 + x + q = 0$. По условию

$$x_1^2 + x_2^2 = 13.$$

Левая часть уравнения — симметрическое выражение относительно x_1 и x_2. Выразим его через $x_1 + x_2$ и x_1x_2, получим уравнение

$$(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 13.$$

Так как $x_1 + x_2 = -1$ и $x_1x_2 = q$, то получим

$$(-1)^2 - 2q = 13.$$

Отсюда $q = -6$.

739. Является ли симметрическим относительно x и y выражение:

а) $x^3y^4 + x^4y^3$; в) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$; д) $(x^2 - 5)(y^2 - 5)$;

б) $(x - y)^5$; г) $\frac{2}{x} + \frac{3}{y}$; е) $(x - y)(x^3 - y^3)$?

740. Выразите через $u + v$ и uv:

а) $u^3 + v^3$; г) $\frac{1}{u^2} + \frac{1}{v^2}$;

б) $u^2 - 3uv + v^2$; д) $(u^2 - v^2)(u - v)$;

в) $u^3 + v^3 - 4uv$; е) $(u^3 + v^3)(u + v)$.

741. Известно, что $a^2 + b^2 = p$, $a + b = q$. Выразите через p и q выражение ab.

742. Известно, что $a^3 + b^3 = m$, $a + b = n$. Выразите через m и n выражение ab.

743. Не решая уравнения $x^2 - 2x - 40 = 0$, корни которого равны x_1 и x_2, найдите значение выражения:

а) $x_1^2 + x_2^2$; б) $(x_1 - x_2)^2$; в) $x_1^3 + x_2^3$; г) $(x_1 - x_2)^4$.

744. Уравнение $6x^2 + x - 2 = 0$ имеет корни x_1 и x_2. Не решая уравнения, найдите:

а) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$; б) $x_1^4 + x_2^4$; в) $\frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3}$; г) $(x_1^2 + x_2^2)^2$.

745. Выразите через коэффициенты уравнения $ax^2 + bx + c = 0$:

а) квадрат суммы его корней;

б) квадрат разности его корней;

в) сумму квадратов его корней;

г) сумму кубов его корней.

746. Найдите коэффициент p уравнения $x^2 + px + 42 = 0$, если квадрат разности его корней равен 1.

747. Сумма квадратов корней уравнения

$$12x^2 - 17x + c = 0$$

равна $1\frac{1}{144}$. Найдите свободный член уравнения.

748. Не решая уравнения $x^2 - 2x - 8 = 0$, найдите значение выражения $x_1^5x_2 + x_1x_2^5$, если x_1 и x_2 — корни этого уравнения.

749. Уравнение $2x^2 - x - 1 = 0$ имеет корни x_1 и x_2. Найдите значение выражения $x_1^4x_2^2 + x_1^2x_2^4$, не решая уравнения.

750. Уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет корни x_1 и x_2. Составьте квадратное уравнение, корни которого:

а) x_1^2 и x_2^2; б) $\frac{x_1}{x_2}$ и $\frac{x_2}{x_1}$.

751. Составьте квадратное уравнение, корни которого обратны квадратам корней уравнения $x^2 + px + q = 0$.

Упражнения для повторения

752. Решите уравнение:

а) $8x^2 - 3x = 0$; б) $7x^2 + 4x = 0$.

753. При каком значении n один из корней уравнения $x^2 - 7x + 2n = 0$ в 2 раза больше одного из корней уравнения $x^2 - 5x + n = 0$?

754. Упростите выражение:

а) $\sqrt{7-4\sqrt{3}} + \sqrt{3}$; б) $\sqrt{\sqrt{17+12\sqrt{2}}}$.

33. Разложение квадратного трехчлена на множители

Найдем значение квадратного трехчлена $3x^2 - 7x + 2$ при $x = 2$:

$$3x^2 - 7x + 2 = 3 \cdot 2^2 - 7 \cdot 2 + 2 = 0.$$

При $x = 2$ квадратный трехчлен $3x^2 - 7x + 2$ обращается в нуль.

Такое значение переменной называют *корнем квадратного трехчлена*.

Определение. **Корнем квадратного трехчлена называется значение переменной, при котором значение квадратного трехчлена равно нулю.**

Чтобы найти корни квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$, достаточно решить уравнение $ax^2 + bx + c = 0$.

Найдем, например, корни квадратного трехчлена $3x^2 - 7x + 2$. Для этого решим квадратное уравнение $3x^2 - 7x + 2 = 0$:

$$D = (-7)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 25,$$

$$x = \frac{7 \pm 5}{6},$$

$$x_1 = 2,\ x_2 = \frac{1}{3}.$$

Значит, квадратный трехчлен $3x^2 - 7x + 2$ имеет два корня: 2 и $\frac{1}{3}$.

Число корней квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ зависит от числа корней квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, а следовательно, от его дискриминанта. Дискриминант квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ называют также *дискриминантом квадратного трехчлена* $ax^2 + bx + c$.

В зависимости от дискриминанта квадратный трехчлен так же, как квадратное уравнение, может иметь два корня, один корень (или два одинаковых корня) или вовсе не иметь корней.

Корни квадратного трехчлена можно использовать при его разложении на множители.

Пример 1. Разложим на множители трехчлен

$$x^2 - 23x + 112.$$

Найдем корни квадратного трехчлена $x^2 - 23x + 112$:

$$x^2 - 23x + 112 = 0,$$
$$D = 529 - 4 \cdot 112 = 81,$$
$$x = \frac{23 \pm 9}{2},$$
$$x_1 = 16,\ x_2 = 7.$$

По теореме Виета второй коэффициент -23 равен $-(16 + 7)$. Подставим это выражение в квадратный трехчлен $x^2 - 23x + 112$ вместо второго коэффициента, раскроем скобки и применим способ группировки:

$$x^2 - 23x + 112 = x^2 - (16 + 7)x + 112 =$$
$$= x^2 - 16x - 7x + 112 = x(x - 16) - 7(x - 16) =$$
$$= (x - 16)(x - 7).$$

Так как первый коэффициент квадратного трехчлена равен единице, то при разложении на множители получилось два множителя. Первый из них есть разность между переменной и одним корнем, второй — разность между переменной и другим корнем. Если бы первый коэффициент был отличен от единицы, то он был бы добавлен к этому произведению в качестве третьего множителя.

Теорема. ***Если x_1 и x_2 — корни квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$, то $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.***

Доказательство. Корни x_1 и x_2 квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ являются корнями квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

Применяя теорему Виета, получим:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a},\ x_1x_2 = \frac{c}{a}.$$

Отсюда

$$b = -a(x_1 + x_2),\ c = ax_1x_2.$$

Подставим получившиеся выражения вместо b и c в квадратный трехчлен и выполним преобразования:

$$ax^2 + bx + c = ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2 =$$
$$= ax^2 - ax_1x - ax_2x + ax_1x_2 = a(x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2) =$$
$$= a(x(x - x_1) - x_2(x - x_1)) = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Значит, $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Доказанная теорема позволяет, найдя корни квадратного трехчлена, записать его в виде произведения первого коэффициента, разности переменной и одного корня и разности переменной и другого корня.

Пример 2. Разложим на множители квадратный трехчлен $2x^2 + 5x - 12$.

Найдем корни трехчлена:

$$2x^2 + 5x - 12 = 0,$$
$$D = 25 + 96 = 121,$$
$$x = \frac{-5 \pm 11}{4},\ x_1 = \frac{3}{2},\ x_2 = -4.$$

Применим теорему о разложении трехчлена на множители:

$$2x^2 + 5x - 12 = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)(x + 4) = (2x - 3)(x + 4).$$

Пример 3. Разложим на множители квадратный трехчлен $4x^2 - 20x + 25$.

Найдем корни трехчлена:

$$4x^2 - 20x + 25 = 0,$$
$$D = 400 - 400 = 0,$$
$$x = \frac{20 \pm 0}{8},$$
$$x_1 = \frac{5}{2},\ x_2 = \frac{5}{2}.$$

Применим теорему о разложении на множители квадратного трехчлена:

$$4x^2 - 20x + 25 = 4\left(x - \frac{5}{2}\right)\left(x - \frac{5}{2}\right) =$$

$$= (2x - 5)(2x - 5) = (2x - 5)^2.$$

Теорема о разложении на множители квадратного трехчлена применима лишь в тех случаях, когда трехчлен имеет корни. Если квадратный трехчлен не имеет корней, то его нельзя разложить на множители, т. е. представить в виде произведения многочленов первой степени. Докажем это утверждение.

Предположим, что в этом случае квадратный трехчлен можно представить в виде произведения многочленов первой степени:

$$ax^2 + bx + c = (mx + n)(kx + p),$$

где m, n, k и p — числа, причем $m \neq 0$, $k \neq 0$.

При $x = -\frac{n}{m}$ значение квадратного трехчлена равно нулю, так как значение первого множителя произведения $(mx + n)(kx + p)$ равно нулю:

$$mx + n = m\left(-\frac{n}{m}\right) + n = -n + n = 0.$$

Значит, число $-\frac{n}{m}$ является корнем квадратного трехчлена, что противоречит условию, согласно которому трехчлен не имеет корней.

755. Разложите на множители:

а) $-2x^2 + 5x + 18$; г) $3x^2 + 0{,}9x - 2{,}1$;
б) $15y^2 + y - 6$; д) $5k^2 + 8k + 3{,}2$;
в) $-12m^2 + 5m + 3$; е) $3p^2 - 0{,}27$.

756. Можно ли разложить на множители квадратный трехчлен:

а) $x^2 - 9x - 10$; в) $\frac{1}{3}p^2 + 2p + 3$;

б) $3m^2 - 6m + 4$; г) $-\frac{1}{2}y^2 + 6y - 20$?

757. Разложите на множители:

а) $3x^3 - 9x^2 + 6x$;

б) $y^3 + 4y^2 - 32y$;

в) $x^3 - 9x^2 + 18x - ax^2 - 9ax - 18a$;

г) $2y^3 + my^2 + 6y^2 + 3my - 20y - 10m$.

758. Представьте в виде произведения многочленов первой степени:

а) $12x^3 - 22x^2 - 20x$; в) $30x^3 + 5x^2 - 60x$;

б) $80my^2 - 12my - 8m$; г) $20km^2 - 92km - 40k$.

759. Разложите на множители:

а) $2x^2 - 5xy + 2y^2$; в) $2x^2 + xy - 6y^2$;

б) $2x^2 - 3xy - 2y^2$; г) $6y^2 + xy - 2x^2$.

760. Сократите дробь:

а) $\dfrac{6y^2+13y-5}{12y-4}$; в) $\dfrac{2k^2-11k-21}{8k^2+6k-9}$;

б) $\dfrac{4x^2-9}{6x^2-5x-6}$; г) $\dfrac{-12p^2+40p-25}{20+7p-6p^2}$.

761. Сократите дробь:

а) $\dfrac{15mx^2-22mx+8m}{60x^2-38x-8}$; б) $\dfrac{18ay^2+39ay-15a}{24ay^2+42ay-45a}$.

762. Выполните действия:

а) $\dfrac{x^2-5x-14}{x+4} \cdot \dfrac{x^2+7x+12}{x-7}$;

б) $\dfrac{2x}{x^2+8x-20} - \dfrac{x}{(x-2)(x+4)}$;

в) $\dfrac{x^2+4x-77}{4x+4} : \dfrac{x^2+13x+22}{2x+2}$;

г) $\dfrac{x}{x^2-6x-72} + \dfrac{3}{x^2+3x-18}$.

763. Упростите выражение:

а) $\left(\frac{2a^2}{2a^2-7a+3}+\frac{a}{3-a}\right)\cdot\left(a-\frac{1}{2}\right)$;

б) $\frac{9a^2-4}{3a^2+11a-4}\cdot\frac{1-3a}{2-3a}-\frac{a-6}{a+4}$;

в) $\frac{3x+1}{x^2-4\frac{1}{2}x-2\frac{1}{2}}:\frac{9x^2-1}{x^2-\frac{11}{2}x+2\frac{1}{2}}+1$;

г) $1-\frac{2x^2+9x-5}{x^2+x-6}:\frac{2x^2-3x+1}{x^2+5x+6}$.

764. Постройте график функции:

а) $y=\frac{x^2-4\frac{1}{2}x-9}{2x+3}$; б) $y=\frac{6x^2-x-2}{3x-2}$.

Упражнения для повторения

765. Буквами α и β обозначены корни уравнения $15x^2-4x-2=0$. Не решая уравнения, найдите значение выражения:

а) $(\alpha-\beta)^2+4\alpha\beta$; в) $2(\alpha-\beta)^2+5$;

б) $(\alpha-\beta)^2+3\alpha\beta$; г) $\frac{1}{3}(\alpha-\beta)^2-\alpha\beta$.

766. Решите уравнение:

а) $\frac{x^2-8}{3}-\frac{3-2x^2}{4}=1$; б) $\frac{x-1}{2}=\frac{x^2-2}{3}-\frac{1}{6}$.

767. Разложите на множители:

а) $-5y^2+15y+4ay-12a$;

б) $3m^3-3mn^2+2m^2n-2n^3$.

768. Сторона одного квадрата на 3 см больше стороны другого. Найдите стороны квадратов, если сумма их площадей равна 317 см^2.

Контрольные вопросы и задания

1. Сформулируйте и докажите теорему Виета. Чему равны сумма и произведение корней квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$?

2. Сформулируйте и докажите теорему, обратную теореме Виета.

3. Приведите пример симметрического выражения относительно двух переменных. Напишите простейшие симметрические выражения.

4. Сформулируйте определение корня квадратного трехчлена. Сколько корней имеет квадратный трехчлен?

5. Сформулируйте и докажите теорему о разложении на множители квадратного трехчлена.

§ 11. ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

34. Решение дробно-рациональных уравнений

До сих пор мы занимались *целыми уравнениями*, т. е. такими уравнениями, в которых обе части являются целыми выражениями. Примерами целых уравнений могут быть уравнения $2x - 7 = 8x + 5$, $\frac{x+1}{6} = 1 + \frac{3x-1}{4}$. К целым уравнениям относятся линейные и квадратные уравнения.

Если одна часть уравнения — целое выражение, а другая — дробно-рациональное или обе части — дробно-рациональные выражения, то уравнение называют ***дробно-рациональным*** уравнением. Примерами дробно-рациональных уравнений являются уравнения $\frac{1}{x} = 5x + 3$; $\frac{x+7}{x} = \frac{x-1}{x+2} + 1$.

Некоторые целые уравнения можно привести к линейным или квадратным уравнениям, с которыми мы уже встречались. Рассмотрим еще два примера.

Пример 1. Решим уравнение

$$x - \frac{x+1}{3} = \frac{2x-1}{5}.$$

Умножим обе части уравнения на общий знаменатель дробей $\frac{x+1}{3}$ и $\frac{2x-1}{5}$ — число 15. Получим:

$$15x - 5x - 5 = 6x - 3.$$

Перенесем $6x$ в левую, а -5 в правую часть уравнения (изменив их знаки) и приведем подобные слагаемые:

$$15x - 5x - 6x = 5 - 3,$$
$$4x = 2.$$

Используя свойства уравнений и тождественные преобразования выражений, мы привели целое уравнение $x - \frac{x+1}{3} = \frac{2x-1}{5}$ к равносильному ему линейному уравнению $4x = 2$. Его корнем является число $\frac{1}{2}$.

Ответ: $\frac{1}{2}$.

Пример 2. Решим целое уравнение

$$\frac{x^2+3}{4} - \frac{x}{3} = \frac{5x-3}{6}. \qquad (1)$$

Умножим обе части уравнения на общий знаменатель входящих в него дробей — число 12. Получим:

$$3x^2 + 9 - 4x = 10x - 6.$$

Перенесем в получившемся уравнении все члены из правой части в левую и приведем подобные слагаемые:

$$3x^2 - 14x + 15 = 0. \qquad (2)$$

С помощью свойств уравнений и тождественных преобразований нам удалось свести целое уравнение (1) к равносильному ему квадратному уравнению (2). Решив его, найдем, что оно имеет два корня: 3 и $1\frac{2}{3}$.

Ответ: 3; $1\frac{2}{3}$.

В некоторых случаях к линейным или квадратным уравнениям можно привести и дробно-рациональные уравнения. Однако это приведение отличается важной особенностью. Рассмотрим пример.

Пример 3. Решим уравнение

$$\frac{x+1}{x+3} + \frac{10x}{(x-2)(x+3)} = \frac{4}{x-2}. \qquad (3)$$

Умножим обе части уравнения на общий знаменатель дробей — выражение $(x - 2)(x + 3)$. Получим целое уравнение

$$(x - 2)(x + 1) + 10x = 4(x + 3). \qquad (4)$$

Каждый корень уравнения (3) является корнем уравнения (4).

Однако нет оснований утверждать, что уравнения (3) и (4) равносильны, так как левая и правая части уравнения (3) умножались не на число, отличное от нуля, а на выражение с переменной. Ведь если корень уравнения (4) обращает это выражение в нуль, то при этом одна или обе части уравнения (3) не будут иметь смысла. Поэтому не всякий корень уравнения (4) будет корнем уравнения (3).

Используя свойства уравнений и тождественные преобразования, приведем целое уравнение (4) к равносильному ему квадратному уравнению

$$x^2 + 5x - 14 = 0.$$

Его корнями являются числа 2 и -7.

Число 2 обращает в нуль общий знаменатель $(x - 2)(x - 3)$, поэтому оно не является корнем уравнения (3). При $x = -7$ значение выражения $(x - 2)(x + 3)$ не равно нулю. Поэтому -7 является корнем уравнения (3).

Ответ: -7.

Вообще чтобы решить дробно-рациональное уравнение, целесообразно:

1) привести его к целому уравнению, умножив левую и правую части на общий знаменатель;

2) решить получившееся целое уравнение;

3) исключить из множества корней целого уравнения те корни, при которых левая или правая части уравнения не имеют смысла, т. е. обращают в нуль общий знаменатель дробей.

Пример 4. Решим уравнение

$$\frac{2}{x} + \frac{x^2 + 8}{x^2 - 4x} = \frac{6}{x - 4}.$$

Разложим знаменатель второй дроби на множители, получим уравнение

$$\frac{2}{x} + \frac{x^2 + 8}{x^2 - 4x} = \frac{6}{x - 4}.$$

Приведем это уравнение к целому, для чего обе его части умножим на $x(x - 4)$:

$$2(x - 4) + x^2 + 8 = 6x.$$

Выполнив тождественные преобразования и применив свойство уравнений, получим квадратное уравнение

$$x^2 - 4x = 0.$$

Его корнями являются числа 0 и 4. Оба они не являются корнями дробного уравнения, так как при $x = 0$ дробь $\frac{2}{x}$ не имеет смысла, а при $x = 4$ дробь $\frac{6}{x-4}$ не имеет смысла.

Ответ: корней нет.

769. Решите уравнение:

а) $\frac{2y^2-3}{y-2} = \frac{3y-11}{2-y}$; г) $\frac{2}{k^2+1} = \frac{9}{3k+4}$;

б) $\frac{m+1}{m+5} = \frac{1-m^2}{6m+30}$; д) $\frac{5}{4x+13} = \frac{1}{2x^2-7}$;

в) $\frac{2x^2+9x}{2x+5} = \frac{4x-10}{4x+10}$; е) $\frac{1}{y^2+y} = \frac{2}{5y+14}$.

770. Найдите корни уравнения:

а) $\frac{5x+2}{x-2} - \frac{x+40}{x} = 0$; г) $\frac{3y+1}{y+2} = \frac{2y-6}{y-3}$;

б) $\frac{3m-4}{m} - \frac{m-1}{m+1} = 0$; д) $\frac{4a+3}{5a+12} = \frac{2a+9}{a+4}$;

в) $\frac{2x-1}{x+3} - \frac{x+1}{3x-7} = 0$; е) $\frac{4x+1}{x+1} = \frac{5x-4}{2x-2}$.

771. Решите уравнение:

а) $\frac{4m^2-5}{m-3} = \frac{2m+1}{m-3}$; г) $\frac{a}{3a+5} - \frac{4a+15}{2a} = 0$;

б) $\frac{3x+20}{x-4} = \frac{16-3x^2}{4-x}$; д) $\frac{4m-1}{m+2} + \frac{3-m}{2m-4} = 0$;

в) $\frac{k^2+k}{4k+32} = \frac{6-k}{k+8}$; е) $\frac{2-3x}{6x-1} + \frac{1-9x}{1+3x} = 0$.

772. Найдите корни уравнения:

а) $\frac{12x^2+1}{2x+3} = 4x - 1$; в) $3y + \frac{2y^2+y}{4y+10} = -3$;

б) $2a - 5 = \frac{7a-5}{3a-9}$; г) $6m = \frac{3m^2+7m}{3m-1} + 1$.

773. При каких значениях аргумента x равны соответствующие значения функций:

а) $y = \frac{3x+7}{x-3}$ и $y = 2x + 1$; б) $y = 7 - x$ и $y = \frac{6x^2-4}{2x+11}$?

774. Найдите координаты точек пересечения графиков функций:

а) $y = \dfrac{3-2x}{3x-2}$ и $y = -2x + 3$; б) $y = 3x + 6$ и $y = \dfrac{4x^2+x}{x+2}$.

775. Решите уравнение:

а) $\dfrac{2x-1}{x+3} + \dfrac{3x+2}{x-2} = 8$;

б) $\dfrac{4m+3}{m-3} - \dfrac{2m-1}{m+3} = -2$;

в) $1 + \dfrac{9-y}{4-y} = \dfrac{7-2y}{y+4}$;

г) $\dfrac{2a^2-2a+16}{9a^2-4} + \dfrac{a-5}{3a+2} = \dfrac{a-3}{2-3a}$.

776. Найдите корни уравнения:

а) $\dfrac{3y+2}{4y^2+y} + \dfrac{y-3}{16y^2-1} = \dfrac{3}{4y-1}$;

б) $\dfrac{1}{3+2a} - \dfrac{5a+6}{9-4a^2} = \dfrac{2}{a}$;

в) $\dfrac{3x+2}{4x^2-4x+1} = \dfrac{2x+1}{2x^2-1} - \dfrac{1}{x}$;

г) $\dfrac{3x-1}{3x^2+2x} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{2x-3}{9x^2+12x+4}$.

777. Решите уравнение:

а) $\dfrac{20}{a^2-4} - \dfrac{a+1}{2a-4} = \dfrac{a-3}{a+2}$;

б) $\dfrac{1}{4p^2-12p+9} + \dfrac{3p+1}{4p-6} = \dfrac{2p-1}{2p-3}$.

778. При каких значениях переменной:

а) сумма дробей $\dfrac{2x-3}{x+5}$ и $\dfrac{3x+1}{x-5}$ равна их произведению;

б) разность дробей $\dfrac{4x+1}{x-2}$ и $\dfrac{2x-5}{x+3}$ равна дроби $\dfrac{4x-47}{x^2+x-6}$?

779. Решите уравнение:

а) $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{9}{x^2} = 3\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{3}{x}\right) + 1\dfrac{3}{4}$; б) $\left(\dfrac{x^2}{x-2}\right)^2 + \dfrac{2x^2-3x+6}{x-2} = 0$.

Упражнения для повторения

780. Разложите на множители:

а) $x^2 - 10x + 36$; в) $3k^2 - 8k - 28$;

б) $-x^2 + 7x - 10$; г) $-2m^2 + 5m - 3$.

781. Составьте квадратное уравнение, корни которого обратны корням уравнения $6x^2 - x - 1 = 0$.

782. Решите относительно x уравнение:

а) $x^2 - 5mx + 3m = 0$; б) $mx^2 - 26x + 25 = 0$.

783. Упростите выражение:

а) $\sqrt{9-4\sqrt{2}} - \sqrt{3+2\sqrt{2}}$; б) $\sqrt{49-12\sqrt{5}} \cdot \sqrt{49+12\sqrt{5}}$.

784. Пересекаются ли графики функций

$$y = 4x^2 - 4x - 3 \text{ и } y = 3x^2 + 2x - 2?$$

35. Решение задач с помощью уравнений

З а д а ч а. Знаменатель обыкновенной дроби на 2 больше числителя. Если числитель дроби увеличить в 2 раза, а знаменатель увеличить на 16, то дробь уменьшится на $\frac{1}{4}$. Найдите дробь.

Р е ш е н и е. Пусть числитель дроби равен x, тогда ее знаменатель равен $x + 2$. После увеличения числителя в 2 раза, а знаменателя на 16 получается дробь $\frac{2x}{x+18}$. Так как полученная дробь меньше данной дроби $\frac{x}{x+2}$ на $\frac{1}{4}$, то

$$\frac{x}{x+2} - \frac{2x}{x+18} = \frac{1}{4}. \qquad (1)$$

Решим дробно-рациональное уравнение. Умножим левую и правую части уравнения (1) на $4(x + 2)(x + 18)$. Выполнив далее тождественные преобразования и применив свойства уравнений, получим квадратное уравнение

$$5x^2 - 36x + 36 = 0.$$

Решим это уравнение:

$$\frac{1}{4}D = (-18)^2 - 5 \cdot 36 = 144,$$

$$x = \frac{18 \pm 12}{5}, \quad x_1 = 6, \; x_2 = 1{,}2.$$

Так как при $x = 6$ и $x = 1,2$ значения выражений $x + 2$ и $x + 18$ отличны от нуля, то числа 6 и 1,2 являются корнями дробно-рационального уравнения (1). Однако число 1,2 не удовлетворяет условию задачи, так как числитель обыкновенной дроби не может быть дробным числом.

Ответ: $\frac{6}{8}$.

Заметим, что дробь $\frac{3}{4}$, которая получается при сокращении дроби $\frac{6}{8}$, не удовлетворяет условию задачи, так как ее знаменатель лишь на 1 больше числителя.

785. Одно число на 6 больше другого. Если большее число разделить на меньшее и к частному прибавить результат от деления учетверенного меньшего числа на большее, то получится 4. Найдите эти числа.

786. Знаменатель обыкновенной дроби на 6 больше ее числителя. Если из числителя вычесть 2, а к знаменателю прибавить 2, то дробь уменьшится на $\frac{1}{6}$. Найдите эту дробь.

787. Знаменатель обыкновенной дроби больше ее числителя на 3. Если числитель дроби увеличить в 3 раза, а затем уменьшить на 7, а знаменатель увеличить в 2 раза, а затем уменьшить на 11, то получится дробь, обратная данной. Найдите эту дробь.

788. Из поселка в город, до которого 150 км, отправились одновременно легковой и грузовой автомобили. Скорость легкового автомобиля была на 10 км/ч больше скорости грузового, и поэтому он затратил на весь путь на $\frac{1}{2}$ ч меньше времени, чем грузовой. Найдите скорость грузового автомобиля.

789. Мотоциклист проехал от села до озера 60 км. На обратном пути он уменьшил скорость на 10 км/ч и поэтому израсходовал времени на 0,3 ч больше. Сколько времени затратил мотоциклист на обратный путь?

790. На 80 км пути велосипедист тратит на 2 ч больше, чем мотоциклист, так как его скорость на 20 км/ч меньше. Найдите скорость велосипедиста.

791. Первый лыжник прошел 30 км на $\frac{1}{2}$ ч быстрее, чем второй 45 км, хотя скорость второго была на 3 км/ч больше. За какое время первый лыжник прошел 30 км?

792. С первого участка собрали 80 ц проса, а со второго 90 ц, хотя площадь второго участка была на 2 га меньше. С каждого гектара второго участка собирали на 5 ц больше, чем с каждого гектара первого. Какова урожайность проса на каждом участке?

793. Катер прошел по течению 36 км и против течения 48 км, затратив на весь путь 6 ч. Какова скорость катера в стоячей воде, если скорость течения 3 км/ч?

794. Плот проплывает по течению 60 км на 5 ч быстрее, чем такое же расстояние проходит моторная лодка против течения. Найдите скорость лодки по течению, если ее скорость в стоячей воде 10 км/ч.

795. Моторная лодка прошла по течению 70 км. За то же время она может пройти против течения 30 км. Найдите скорость течения, если скорость лодки в стоячей воде 10 км/ч.

796. Две швеи, работая вместе, выполнят полученный заказ за 6 дней. За сколько дней каждая из них, работая отдельно, могла бы выполнить заказ, если одной потребуется для этого на 5 дней больше, чем другой?

797. Два слесаря выполнили задание за 12 ч. Если бы половину задания выполнил первый, а оставшуюся часть второй, то первому потребовалось бы времени на 5 ч больше, чем второму. За сколько часов каждый из них мог бы выполнить задание?

798. Для выполнения половины заказа первой ткачихе потребуется на 2 дня больше, чем второй для выполнения всего заказа. Вместе они выполнят заказ на 1 день быстрее, чем одна вторая. За сколько дней каждая ткачиха, работая отдельно, может выполнить заказ?

799. Из пунктов A и B вышли одновременно навстречу друг другу два пешехода. Их встреча произошла в 10 ч. Пешеход, вышедший из A, прошел до встречи на 2 км больше. Продолжая путь, он прибыл в B в 10 ч 40 мин. Второй пешеход прибыл в A в 11 ч 30 мин. Найдите расстояние от A до B.

800. Из сосуда, заполненного спиртом, отлили 6 л. Затем долили в него столько же литров воды и опять отлили 5 л смеси. В сосуде осталась смесь, содержащая 80% спирта. Найдите вместимость сосуда.

801. Пройдя половину пути, поезд увеличил скорость на 30 км/ч. С какой скоростью прошел поезд первую половину пути, если его средняя скорость на всем пути оказалась равной 72 км/ч?

802. Из одного пункта по шоссе в северном направлении вышли два автомобиля. Скорость первого автомобиля — 80 км/ч, а скорость второго — 100 км/ч. Через 1 ч из того же пункта в том же направлении вышел третий автомобиль. После того как он догнал первый автомобиль, ему понадобилось еще 3 ч, чтобы догнать второй. Какова скорость третьего автомобиля?

803. В раствор, содержащий 40 г соли, добавили 100 г воды. В результате этого концентрация соли уменьшилась на 2%. Найдите первоначальную массу раствора.

804. Колонна машин движется по дороге со скоростью 40 км/ч. Посыльный выехал из конца колонны в ее начало, передал план дальнейшего движения и возвратился обратно. На весь путь он затратил 1 ч 12 мин. Найдите скорость посыльного, если длина колонны 20 км.

805. Из одного пункта выехали одновременно в одном и том же направлении два автомобиля. Первый со скоростью 60 км/ч, а второй со скоростью 80 км/ч. Спустя 0,5 ч из того же пункта вслед за ними выехал третий автомобиль. Он догнал второй автомобиль через $1\frac{1}{4}$ ч после того, как обогнал первый. Найдите скорость третьего автомобиля.

806. Вниз по реке от пристани P отправили одновременно катер и плот. Катер прошел 48 км и вернулся обратно через 7 ч. По пути он встретил плот на расстоянии 12 км от пристани P. Какова скорость течения и скорость катера в стоячей воде?

Упражнения для повторения

807. Разложите на множители:

а) $x^2 - x - 110$; в) $2m^2 - 5m - 12$;

б) $3x^2 + 10x + 3$; г) $6y^2 - y - 2$.

808. Составьте квадратное уравнение, имеющее корни:

а) $5 - \sqrt{7}$ и $5 + \sqrt{7}$; б) $\frac{1}{3 + \sqrt{2}}$ и $\frac{1}{3 - \sqrt{2}}$.

809. Принадлежат ли графику функции $y = 2x^2 - 4x + 5$ точки $A(-1,5;\ 15,3)$, $B(0,5;\ 3,5)$ и $C(1,5;\ 6,5)$?

810. Докажите, что верно равенство:

а) $\dfrac{1}{2\sqrt{20}-9} - \dfrac{1}{2\sqrt{20}+9} = -18$;

б) $\dfrac{7+3\sqrt{5}}{7-3\sqrt{5}} + \dfrac{7-3\sqrt{5}}{7+3\sqrt{5}} = 47$.

Контрольные вопросы и задания

1. Приведите пример целого уравнения и пример дробно-рационального уравнения.

2. При решении дробно-рационального уравнения его свели к квадратному уравнению, имеющему корни -5 и 7. В каком случае эти числа являются корнями дробно-рационального уравнения?

Дополнительные упражнения к главе 4

К параграфу 9

811. Решите уравнение:

а) $m^2 - 2\dfrac{1}{4} = 0$; в) $-0,1x^2 + 10 = 0$;

б) $m^2 + \dfrac{1}{9} = 0$; г) $6 - 1,2y^2 = 0$.

812. Решите уравнение:

а) $2x^2 - 3x = 0$; в) $2x^2 = 3x$;

б) $\dfrac{1}{3}x - 4x^2 = 0$; г) $x^2 = -5x$.

813[1]. Решите уравнение:

а) $5x^2 = 40x$; в) $3x^2 = 27$;

б) $\dfrac{25}{9}x^2 = 100$; г) $3x^2 = \sqrt{36x^2}$.

---

[1] Уравнения этого упражнения составлены: а) и б) среднеазиатским ученым Мухаммедом ал-Хорезми (783 — около 850); в) преподавателем Венского университета Генрихом Шрейбером (ум. в 1525); г) немецким математиком Адамом Ризе (1492—1559).

814. Найдите корни уравнения:

а) $(2x - 1)^2 - (x - 2)^2 = 0$;

б) $(3x + 5)^2 - (2x + 5)^2 = 0$;

в) $(2a^2 - 3)^2 - (2a^2 + 1)^2 + 1 = 0$;

г) $(m + 4)(m^2 - 4m + 16) - m(m + 1)(m - 1) = m^2 + 1$.

815. Решите относительно x уравнение:

а) $x^2 = a$; в) $x^2 = a^2$; д) $2x^2 - 3xa = 0$;

б) $x^2 = -a$; г) $x^2 = -a^2$; е) $x^2 - 9a = 0$.

816. Решите уравнение с помощью выделения квадрата суммы или квадрата разности:

а) $x^2 + 6x - 16 = 0$; в) $4x^2 - 12x + 5 = 0$;

б) $x^2 - 4x - 12 = 0$; г) $9x^2 + 12x - 5 = 0$.

817. Найдите корни уравнения:

а) $6x^2 - 7x + 2 = 0$; д) $x^2 - 2x - 2 = 0$;

б) $8x^2 + 10x - 3 = 0$; е) $4x^2 - 4x - 7 = 0$;

в) $9x^2 - 12x + 4 = 0$; ж) $x^2 + 6x + 4 = 0$;

г) $20x^2 + 16x + 3 = 0$; з) $x^2 + 2x - 11 = 0$.

818. Решите уравнение:

а) $2y^2 - 5y + 1 = 34$;

б) $-3m^2 + 7m + 24 = -2$;

в) $\frac{1}{2}n^2 - 6n + 10 = -6$;

г) $2(x - 3)^2 + 30x = -3x - 1$;

д) $(3k - 1)(3k + 1) = (2k + 3)^2 - 14$;

е) $3(2x + 1)^2 = (6 - x)(x + 6) - 32$.

819. При каких значениях переменной верно равенство:

а) $(2x - 1)^2 = -2x + 1$; в) $(3x - 1)^2 = -3x - 1$;

б) $(3x + 2)^2 = -3x - 2$; г) $(3x + 1)^2 = -3x + 1$?

820. Найдите значения переменной, при которых равны значения выражений:

а) $4x^2 - 5x + 3$ и $2x^2 - 3x + 27$;

б) $-3m^2 + 4m + 1$ и $-5m^2 + 6m + 1$;

в) $3p^2 - 10p + 4$ и $-2p^2 + 7p - 2$;

г) $-5x^2 - 2x - 3$ и $3x^2 + 30x + 21$.

821[1]. Решите уравнение:

а) $10x = x^2 + 21$; д) $3x^2 + 12 = 30x$;
б) $x^2 = 12x + 288$; е) $3x^2 + 12 = 9x$;
в) $x^2 + 10x = 39$; ж) $144 + x^2 = 36x$;
г) $3x^2 + 12 = 12x$; з) $x^2 = 12x - 36$.

822. Составьте биквадратное уравнение с целыми коэффициентами, зная, что один из его корней равен $\sqrt{5}$, а второй $\sqrt{2}$.

823. Решите уравнение:

а) $(x^2 + 6x)^2 - 4(x^2 + 6x + 1) - 17 = 0$;

б) $(x^2 + x)^2 - 5(x^2 + x - 4) = -6$;

в) $x(x - 2)(x - 3)(x - 5) = 72$;

г) $(x + 2)(x - 3)(x - 6)(x - 1) = -56$.

824. Найдите корни уравнения:

а) $x^4(x + 1)^4 - 40x^2(x + 1)^2 + 144 = 0$;

б) $\dfrac{(x + 3)^4}{x^4} - \dfrac{61(x + 3)^2}{x^2} + 900 = 0$.

825. Решите уравнение[2] $3x + 4\sqrt{x^2 - 3x} = x^2 + 4$, используя введение новой переменной.

826. Докажите, что один из корней каждого из квадратных уравнений $ax^2 - (a + c)x + c = 0$ и $ax^2 + bx - (a + b) = 0$ равен 1.

827. Докажите, что если квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет корни, то они обратны корням квадратного уравнения $cx^2 + bx + a = 0$.

828. Разность кубов двух последовательных целых чисел равна 217. Найдите эти числа.

829. Найдите три последовательных четных натуральных числа, квадрат большего из которых равен сумме квадратов двух других чисел.

---

[1] Уравнения этого упражнения составлены: а) и б) среднеазиатским ученым Мухаммедом ал-Хорезми (783 — около 850); в) персидским ученым Омаром Хайямом (1048—1122); в) — ж) французским математиком Николой Шюке (ум. 1500); з) немецким математиком Михаилом Штифелем (1487—1567).

[2] Уравнение взято из книги «Практика геометрии» (1220) итальянского математика Леонардо Фибоначчи.

830. Длины в сантиметрах трех ребер прямоугольного параллелепипеда, выходящих из одной вершины, выражаются тремя последовательными натуральными числами. Площадь поверхности этого прямоугольного параллелепипеда равна 724 см^2. Найдите его ребра.

831. Белый прямоугольник, длина которого 9 см и ширина 6 см, наклеен на зеленый так, что образовалась зеленая рамка одной и той же ширины. Найдите ширину рамки, если площадь зеленого прямоугольника 130 см^2.

832. Из квадратного листа картона изготовили открытую коробку, вырезав по углам квадраты со стороной 5 см. Найдите сторону квадратного листа, если объем коробки 845 см^3.

833. За весь сезон в футбольной лиге было сыграно 132 матча. Каждая команда сыграла с каждой один раз на своем поле и один раз на чужом. Сколько команд было в лиге?

834. Несколько волейбольных команд организовали турнир, на котором было проведено 15 игр. По условию турнира каждая команда играла с каждой один раз. Сколько команд участвовало в турнире?

К параграфу 10

835. При каком значении c один из корней квадратного уравнения $4x^2 - 5x + c = 0$:

а) на $1\frac{3}{4}$ больше другого; б) в 4 раза больше другого?

836. Найдите свободный член квадратного уравнения $5x^2 - 3x + k = 0$, корни которого x_1 и x_2, если:

а) $2x_1 - 5x_2 = 11$; в) $5x_1 = 5x_2 - 1$;

б) $-x_1 + 2x_2 = 4{,}2$; г) $2x_1 - 3 = -5x_2$.

837. Найдите значение коэффициентов b и c квадратного уравнения $-2x^2 + bx + c = 0$, если:

а) один из его корней равен 3, а другой — свободному члену c;

б) один из его корней равен -2, а другой — коэффициенту b.

838. Используя квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$, выразите через p и q:

а) сумму чисел, обратных его корням;
б) сумму квадратов его корней;
в) квадрат разности его корней;
г) сумму кубов его корней.

839. Докажите, что при любом значении a уравнение $7x^2 + 10x + a^2 + 1 = 0$ не имеет положительных корней.

840. Докажите, что при любом значении b уравнение $3x^2 + bx - 7 = 0$ имеет один положительный и один отрицательный корень.

841. Разложите на множители квадратный трехчлен:

а) $6x^2 - 8{,}4x + 2{,}7$; в) $2x^2 - 3x\sqrt{3} + 3$;

б) $-4{,}4x^2 + 8{,}7x + 0{,}2$; г) $4x^2 - x\sqrt{5} - 25$.

842. Сократите дробь:

а) $\dfrac{2m^2+3m-9}{4m^2-12m+9}$; б) $\dfrac{c^2+2c-8}{c^2+3c-4}$; в) $\dfrac{x^2-4x-5}{x^3y+y}$.

843. Упростите выражение:

а) $-\dfrac{4x+18}{x^2-x-6} + \dfrac{x+3}{x-3}$; б) $\dfrac{m-8}{m+2} : \dfrac{m^2-7m-8}{m^2-4} - 1$.

844. Представьте уравнение в виде $a(x^2)^2 + bx^2 + c = 0$ и решите его сначала относительно x^2, а потом относительно x:

а) $4x^4 - 37x^2 + 9 = 0$; б) $9x^4 - 37x^2 + 4 = 0$.

845. Разложите на множители многочлен:

а) $x^4 + 17x^2 + 16$; в) $4x^4 - 17x^2 + 4$;

б) $x^4 + 2x^2 - 24$; г) $9x^4 - 26x^2 - 3$.

846. При каких значениях m не имеет корней уравнение:

а) $2x^4 + 4x^2 + m = 0$; б) $3x^4 - mx^2 + 3 = 0$?

К параграфу 11

847. Решите уравнение:

а) $\dfrac{5}{x^2-4} + \dfrac{x}{x-2} = \dfrac{20}{x+2}$;

б) $\dfrac{8}{x^2-3x} - \dfrac{x-2}{x} = \dfrac{4}{x-3}$;

в) $\frac{8}{x^2-3x-10}+\frac{x+10}{x+2}=\frac{3}{x-5}$;

г) $\frac{1}{x-4}=\frac{6}{x^2-3x-4}-\frac{x-5}{x+1}$.

848. Найдите корни уравнения:

а) $\frac{7m+9}{2m^2-4m}+\frac{3m+1}{m^2-4}=\frac{8m+3}{3m^2-6m}$;

б) $\frac{5x+4}{3x^2+9x}-\frac{6-7x}{x^2-3x}=\frac{3x+1}{9-x^2}$;

в) $\frac{4p+5}{4p^2-1}+\frac{p+1}{p-2p^2}=\frac{3p}{2p^2+p}$;

г) $-\frac{7x-3}{2x-3x^2}-\frac{4x-1}{9x^2-4}=-\frac{2x+1}{2x+3x^2}$;

д) $\frac{5m+4}{m^3-8}-\frac{2}{m-2}=\frac{2-7m}{m^2+2m+4}$;

е) $\frac{3-2n}{n^2-n+1}+\frac{1-2n^2}{n^3+1}=-\frac{2}{n+1}$;

ж) $\frac{x+6}{1+2x+4x^2}-\frac{2}{2x-1}=\frac{8x^2-1}{1-8x^3}$;

з) $\frac{4}{3m+1}+\frac{3m-7}{27m^3+1}=\frac{1-6m}{1-3m+9m^2}$.

849. При каком значении переменной x сумма дробей $\frac{x+2}{x-1}$ и $\frac{x+1}{x-2}$ равна их произведению?

850[1]. Решите уравнение $\frac{x}{10-x}+\frac{10-x}{x}=2{,}5$.

851. Дана обыкновенная дробь, знаменатель которой на 1 меньше утроенного числителя. Если из нее вычесть другую дробь, числитель которой на 2 меньше числителя, а знаменатель на 4 меньше знаменателя данной дроби, то получится $\frac{1}{8}$. Найдите данную дробь.

[1] Уравнение немецкого математика и астронома Региомонтана (1436—1476).

852. Сумма числителя и знаменателя первой обыкновенной дроби равна 10, а второй 18. Числитель второй дроби в 3 раза больше числителя первой. Произведение дробей равно $1\frac{1}{3}$. Найдите эти дроби.

853. Разность между знаменателем и числителем первой обыкновенной дроби равна 4, а второй 7. Знаменатель первой дроби в 2 раза меньше знаменателя второй. При делении первой дроби на вторую получается $\frac{4}{5}$. Найдите эти дроби.

854. Отправление поезда из города до станции, удаленной от него на 150 км, было задержано на 30 мин. Чтобы прийти в пункт назначения по расписанию, пришлось увеличить скорость на 10 км/ч. С какой скоростью должен был идти поезд по расписанию?

855. Поезд должен был пройти 400 км. Когда осталось пройти три четверти этого пути, его задержали на 2,5 ч. Чтобы прийти вовремя, он увеличил скорость на 20 км/ч. Сколько времени, считая задержку, поезд был в пути?

856. Фермер отправился на машине в село, расположенное на расстоянии 60 км от его фермы. Первую четверть пути он проехал на 5 км/ч медленнее, чем предполагал. На оставшемся пути он увеличил скорость на 15 км/ч и на весь путь потратил 1 ч 5 мин. С какой скоростью предполагал ехать фермер?

857. Первый велосипедист проехал 36 км, второй 33 км и третий 35 км. Скорость второго была на 3 км/ч меньше скорости первого и на 1 км/ч больше скорости третьего. Третий велосипедист потратил времени на полчаса больше, чем первый. Сколько времени затратил каждый велосипедист?

858. Автомобиль прошел расстояние от села до города за 5 ч. В обратный путь он отправился с той же скоростью. Однако, проехав 50 км, он снизил скорость на 10 км/ч и поэтому на обратный путь он затратил на 1 ч больше. Какое расстояние от села до города?

859. Из одного города в другой, расстояние до которого 310 км, выехали одновременно два автомобиля. Пройдя 100 км, первый автомобиль увеличил скорость на 20 км/ч и прибыл во второй город вместе со вторым автомобилем. Второй автомобиль ехал все время с постоянной скоростью, которая была на 12 км/ч больше, чем скорость первого автомобиля в начале пути. Найдите скорость первого автомобиля в начале пути.

860. Три автомобиля перевозят грузы между двумя городами, расстояние между которыми 600 км. Первый автомобиль тратит на весь путь на 2,5 ч меньше, чем второй, а третий — на 5 ч больше, чем второй. Найдите скорость второго автомобиля, если скорость первого на 40 км/ч больше скорости третьего.

861. Катер прошел вниз по реке 115 км и вверх 170 км. Во втором случае он затратил на 5 ч больше, чем в первом. Найдите скорость течения, если скорость катера в стоячей воде 20 км/ч.

862. Лесорубы отправили по течению реки плот. За ним следом через 5,6 ч отправилась моторная лодка, которая догнала плот, пройдя 36 км. С какой скоростью плыл плот, если моторная лодка шла быстрее плота на 10,5 км/ч?

863. От пристани вниз по реке отправлен плот, который должен был пройти до лесопильного завода 54 км. Плот был в пути 4 ч, когда навстречу ему от лесопильного завода отошел катер, скорость которого в стоячей воде 21 км/ч. Встреча произошла в 36 км от завода. Найдите скорость плота.

864. Туристы взяли напрокат лодку. За 3 ч они поднялись вверх по реке на 12 км и вернулись обратно. Какова скорость лодки в стоячей воде, если скорость течения 2 км/ч?

865. Расстояние от пристани A до пристани B, расположенной выше по течению реки, катер пройдет за 11,5 ч. Если он не дойдет 100 км до B и возвратится обратно, то времени затратит столько же, сколько тратит на путь от A до B. Найдите скорость катера в стоячей воде, если скорость течения 3 км/ч.

866. Поставили два забора из стандартных секций. Длина каждого забора 63 м. На первый забор пошло на 3 секции меньше, чем на второй, так как ширина каждой секции первого забора была на 0,5 м больше ширины секции второго забора. Найдите ширину секций, из которых собран каждый забор.

867. Окружность переднего колеса специального велосипеда меньше окружности заднего колеса на 0,6 м. На расстоянии 36 м переднее колесо делает на 5 оборотов больше заднего. Найдите длину окружности каждого колеса.

868. Два маляра могут покрасить стены за 12 ч. Сначала приступил к работе один маляр, и, когда он выполнил половину работы, его сменил второй. Вся работа была выполнена за 25 ч. За сколько часов каждый маляр может один выполнить всю работу?

869. Два фермера вырыли колодец за 24 ч. Сколько часов пришлось бы работать каждому из них отдельно, если одному из них потребовалось бы, чтобы выполнить всю работу, на 20 ч больше, чем другому?

870. Два автомата могут выполнить работу за 6 дней. За сколько дней каждый автомат отдельно выполнит всю работу, если одному из них потребуется на это на 5 дней больше?

871. За 16 дней двумя экскаваторами можно вырыть $\frac{4}{9}$ траншеи для прокладки труб. За сколько дней выполнил бы эту работу каждый экскаватор, если одному понадобится для этого на 30 дней больше, чем другому?

872. Через две трубы половина бассейна наполнится за 2 ч. За сколько часов каждая труба наполнит бассейн, если одной потребуется на 6 ч больше, чем другой?

873. Две трубы наполнят бассейн на 16 ч быстрее, чем одна первая труба, и на 25 ч быстрее, чем одна вторая. За сколько часов обе трубы наполнят бассейн?

874. Первый теплоход вышел из порта A в порт B на сутки раньше второго теплохода, а пришел в порт B на сутки позже, так как вторую половину пути он шел медленнее на 10 км/ч, чем первую. Сколько суток шел второй теплоход в пункт B, если, увеличив скорость на 10 км/ч, весь обратный путь он проделал за 6 суток? (Скорость первого и второго теплоходов в момент выхода из порта A одинакова.)

875. В некоторый момент времени часы показывают на 2 минуты меньше, хотя и идут быстрее, чем нужно. Если бы они показывали на 3 минуты меньше, но уходили бы в сутки на полминуты больше, чем уходят, то верное время они показали бы на сутки раньше, чем покажут. На сколько минут в сутки уходят эти часы?

ГЛАВА 5

НЕРАВЕНСТВА

§ 12. ЧИСЛОВЫЕ НЕРАВЕНСТВА И НЕРАВЕНСТВА С ПЕРЕМЕННЫМИ

36. Сравнение чисел

В науке и практике часто приходится сравнивать два каких-либо числа. Для любых чисел a и b выполняется одно и только одно из соотношений: a равно b, a меньше b, a больше b. Результат сравнения чисел записывают в виде числовых равенств или числовых неравенств, используя знаки $=$, $<$, $>$.

Вам известно, как сравнить два натуральных числа, две обыкновенные дроби, две десятичные дроби, два отрицательных числа и т. п. В отдельных случаях для сравнения чисел используют некоторые специальные приемы. Приведем примеры.

Пример 1. Сравним числа:

а) $\frac{8}{9}$ и $\frac{120}{121}$; б) 0,47 и $\frac{4}{7}$; в) $-\frac{5}{36}$ и $-\frac{5}{123}$.

а) Для сравнения дробей заметим, что первая дробь отличается от единицы на $\frac{1}{9}$, а вторая — только на $\frac{1}{121}$. Значит, $\frac{8}{9}<\frac{120}{121}$.

б) Первая дробь меньше $\frac{1}{2}$, а вторая больше $\frac{1}{2}$, так как ее числитель больше половины знаменателя. Следовательно, $0{,}47 < \frac{4}{7}$.

в) Сравним модули данных чисел, т. е. дроби $\frac{5}{36}$ и $\frac{5}{123}$. Первая из них больше, так как числители дробей равны, а знаменатель первой дроби меньше. По правилу сравнения отрицательных чисел получаем, что $-\frac{5}{36} < -\frac{5}{123}$.

Удобно, однако, иметь способ сравнения, не зависящий от конкретного вида числа. Этот способ связан с изображением чисел на координатной прямой. Пусть a и b — действительные числа и $a > b$. Тогда число a изображается на координатиой прямой точкой, лежащей правее точки, изображающей число b. Это означает, что $a = b + c$, где c — положительное число, так как передвижение по координатной прямой вправо соответствует прибавлению положительного числа (рис. 38, а). Отсюда по определению разности получим, что $a - b = c$, где c — положительное число. Аналогично можно показать, что если $a < b$, то $a - b = p$, где p — отрицательное число (рис. 38, б). Проведенные рассуждения служат основанием для принятия следующего определения.

Определение. **Число a больше числа b, если разность $a - b$ — положительное число; число a меньше числа b, если разность $a - b$ — отрицательное число; число a равно числу b, если разность $a - b$ равна нулю.**

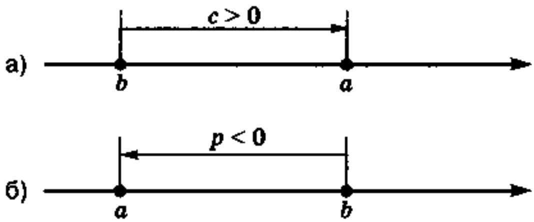


Рис. 38

Пример 2. Сравним числа a и b, если:
а) $a - b = (-2{,}7)^3$; б) $a - b = (-1)^{6n}$; в) $a - b = 3^7 + (-3)^7$.
Имеем:
а) $a < b$, так как $(-2{,}7)^3 < 0$;
б) $a > b$, так как $(-1)^{6n} > 0$;
в) $a = b$, так как $3^7 + (-3)^7 = 0$.

876. Сравните числа:

а) $\frac{38}{39}$ и $\frac{11}{12}$; г) 3,12 и $3\frac{1}{8}$;

б) $\frac{5}{7}$ и $\frac{4}{9}$; д) 17,2(7) и 17,27;

в) $-\frac{6}{19}$ и $-\frac{6}{29}$; е) $-5\frac{1}{3}$ и $-5{,}(3)$.

877. Замените «звездочку» какой-либо цифрой так, чтобы получилось верное двойное неравенство:

а) $5{,}617 < 5{,}6 * 8 < 5{,}641$;

б) $\frac{1}{9} < \frac{*}{6} < \frac{17}{18}$;

в) $-16{,}07 > -16{,} * 4 > -16{,}15$;

г) $\frac{1}{3} < \frac{*}{6} < \frac{7}{8}$.

878. Расположите в порядке возрастания числа

$$-1\frac{1}{3};\ -1{,}2;\ 1{,}14;\ 1\frac{1}{8};\ -1{,}5;\ 1{,}0(2).$$

879. Расположите в порядке убывания числа

$$-0{,}55;\ -\frac{1}{3};\ \frac{1}{6};\ 0{,}16;\ -\frac{1}{7};\ 0{,}1(7).$$

880. Укажите все дроби вида $\frac{5}{n}$, где $n \in N$, заключенные между числами:

а) $\frac{1}{7}$ и $\frac{1}{6}$; б) $\frac{1}{2}$ и $\frac{2}{3}$; в) 0,4 и 0,5.

881. Сравните значения выражений:

а) $47{,}5^2 - 42{,}5^2$ и 90;

в) $67\frac{1}{3} \cdot 64\frac{2}{3}$ и 66^2;

б) $\frac{6{,}7^3 + 1{,}7^3}{8{,}4}$ и $6{,}7^2 + 1{,}7^2$;

г) $\frac{3{,}9^5 - 1{,}9^5}{2}$ и $3{,}9^4 + 1{,}9^4$.

882. В 12 ч 15 мин из поселка вышел турист и направился на станцию со скоростью 4,5 км/ч. Спустя 30 мин навстречу ему со станции вышел другой турист, который шел со скоростью 5 км/ч и в 13 ч 45 мин встретился с первым. Место встречи расположено ближе к поселку или к станции?

883. Вкладчик решил положить 3000 р. на полгода в один из двух близлежащих банков. Первый банк выплачивает доход из расчета 28% годовых, а второй ежемесячно дает доход в 2%, причем проценты начисляются со всей накопленной суммы. В какой из банков вкладчику выгоднее положить деньги?

884. Два вкладчика решили положить в банк на три месяца по 5000 р. Первый вкладчик положил деньги в банк, выплачивающий доход из расчета 32% годовых. Второй положил деньги в банк, который ежемесячно выплачивает по 2,5% с учетом всей накопленной суммы. Кто из вкладчиков получил больше денег?

885. Сравните числа x и y, если:

а) $x - y = (-2{,}7)^{13}$; б) $x - y = (-1{,}116)^9$.

886. Известно, что $a < b$. Может ли разность $a - b$ выражаться числом:

а) $-8{,}01$; б) $(-6{,}4)^5$; в) $|-3{,}3|$; г) $(-2)^{36}$?

887. Докажите, что если $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, a, b, c, d — положительные числа, причем a — наибольшее из них, то $a + d > b + c$. (V книга «Начал» Евклида).

Упражнения для повторения

888. Определяя массу груза a с точностью до 1 кг, получили, что она равна 56 кг. Может ли масса этого груза, измеренная с точностью до 0,1 кг, быть равной:

а) 56,4 кг; б) 54,9 кг; в) 56,1 кг; г) 57,2 кг?

889. Укажите наименьшее и наибольшее целые числа, принадлежащие промежутку:

а) $\left(-3{,}5;\ 2\frac{1}{2}\right)$; в) $\left(-12;\ \sqrt{35}\right]$;

б) $[-4;\ 8)$; г) $\left[-\sqrt{7};\ \sqrt{5} + 2\right]$.

890. Найдите значение выражения:

а) $\frac{27 \cdot 729}{9^4}$; б) $\frac{3^6}{81 \cdot 243}$.

37. Свойства числовых неравенств

Рассмотрим некоторые свойства числовых неравенств.

Теорема 1. ***Если $a < b$, то $b > a$; если $a > b$, то $b < a$.***

Доказательство. Если $a < b$, то по определению разность $a - b$ является отрицательным числом. Тогда противоположное ему число $b - a$ — положительное, а это означает, что $b > a$.

Аналогично доказывается, что если $a > b$, то $b < a$.

Теорема 2. *Если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$.*

Доказательство. По условию $a < b$ и $b < c$. Отсюда по определению каждая из разностей $a - b$ и $b - c$ является отрицательным числом. Рассмотрим разность $a - c$. Прибавляя b и вычитая b, получим:

$$a - c = a - c + b - b = (a - b) + (b - c).$$

Сумма двух отрицательных чисел есть число отрицательное. Значит, разность $a - c$ — отрицательное число и по определению $a < c$.

Аналогично можно доказать, что если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$.

Доказанное свойство отношения меньше (больше) называется свойством *транзитивности* (от лат. *transitus* — «переход», «прохождение»). Можно привести другие примеры отношений, обладающих свойством транзитивности, например: отношение делимости между целыми числами (если a делится на b и b делится на c, то a делится на c), отношение параллельности между различными прямыми (если $a \parallel b$ и $b \parallel c$, то $a \parallel c$).

Теорема 3. *Если $a < b$ и c — любое число, то $a + c < b + c$.*

Доказательство. Так как $a < b$, то разность $a - b$ является отрицательным числом. Рассмотрим разность $(a + c) - (b + c)$. Выполняя тождественные преобразования, получим:

$$(a + c) - (b + c) = a + c - b - c = a - b.$$

Значит, разность $(a + c) - (b + c)$ является отрицательным числом и по определению $a + c < b + c$.

Таким образом, мы доказали свойство неравенств:

если к обеим частям верного неравенства прибавить одно и то же число, то получится верное неравенство.

Теорема 4. *Если $a < b$ и c — положительное число, то $ac < bc$; если $a < b$ и c — отрицательное число, то $ac > bc$.*

Доказательство. Рассмотрим разность $ac - bc$. Преобразуем ее:

$$ac - bc = c(a - b).$$

Если $a < b$, то разность $a - b$ является отрицательным числом. При положительном c произведение $c(a - b)$ отрицательно, а при отрицательном c это произведение положительно. Это означает по определению, что если $a < b$ и $c > 0$, то $ac < bc$, а если $a < b$ и $c < 0$, то $ac > bc$.

Так как деление можно заменить умножением на число, обратное делителю, то аналогичное свойство справедливо и для деления.

Итак, доказано следующее свойство неравенств:

если обе части верного неравенства умножить или разделить на одно и то же положительное число, то получится верное неравенство;

если обе части верного неравенства умножить или разделить на одно и то же отрицательное число и изменить знак неравенства на противоположный, то получится верное неравенство.

Следствие. ***Если a и b — положительные числа и $a < b$, то $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.***

Доказательство. Разделив обе части неравенства $a < b$ на положительное число ab, получим, что $\frac{a}{ab} < \frac{b}{ab}$, т. е. $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$.

Теорема 5. ***Если $a < b$ и $c < d$, то $a + c < b + d$.***

Доказательство. По определению каждая из разностей $a - b$ и $c - d$ является отрицательным числом. Рассмотрим разность $(a + c) - (b + d)$. Преобразовав ее, получим:

$$(a + c) - (b + d) = a + c - b - d = (a - b) + (c - d).$$

Сумма двух отрицательных чисел является отрицательным числом. Значит, по определению $a + c < b + d$.

Теорема справедлива и в случае почленного сложения трех и более неравенств.

Доказанная теорема выражает еще одно свойство неравенств:

если сложить почленно верные неравенства одного знака, то получится верное неравенство.

Теорема 6. ***Если $a < b$ и $c < d$, причем a, b, c и d — положительные числа, то $ac < bd$.***

Доказательство. По определению каждая из разностей $a - b$ и $c - d$ является отрицательным числом. Рассмотрим разность $ac - bd$. Выполняя преобразования, получим:

$$ac - bd = ac - bc + bc - bd = c(a - b) + b(c - d).$$

Каждое из слагаемых $c(a - b)$ и $b(c - d)$, а значит, и их сумма отрицательны. Отсюда получаем, что разность $ac - bd$ является отрицательным числом, и по определению $ac < bd$.

Теорема справедлива и для почленного умножения трех и более неравенств указанного вида.

Таким образом, доказано следующее свойство:

если перемножить почленно верные неравенства одного знака, в которых левые и правые части являются положительными числами, то получится верное неравенство.

Следствие. Если a и b — положительные числа и $a < b$, то $a^n < b^n$, где $n \in N$.

Доказательство. Перемножая почленно n верных неравенств $a < b$, где a и b — положительные числа, получим верное неравенство $a^n < b^n$.

891. На координатной прямой изображены числа a и b (рис. 39). Изобразите на координатной прямой и сравните числа:

Рис. 39

а) $2a$ и $2b$; б) $-a$ и $-b$.

892. Зная, что $a < b$, сравните числа:

а) $a - 1$ и $b + 6$; в) $b + 5$ и $a - 8$;

б) $a - 14$ и $b + 1$; г) $a + 2$ и $b - 6$.

893. Зная, что $a < b$, поставьте вместо многоточия знак $<$ или $>$ так, чтобы получилось верное неравенство:

а) $-3a \ldots -3b$; в) $5a - 17{,}6 \ldots 5b - 17{,}6$;

б) $\frac{a-4}{4{,}5} \ldots \frac{b-4}{4{,}5}$; г) $-\frac{a+2}{8} \ldots -\frac{b+2}{8}$.

894. Зная, что $a < b$, сравните:

а) $5a$ и $5b + 1$; в) $-a + 8$ и $-b + 7$;

б) $3a - 6$ и $3b$; г) $5b + 2$ и $5a - 3$.

895. Выясните, является ли число a положительным или отрицательным, если известно, что:

а) $15a > 6a$; в) $-3a + 7 > -a + 7$;
б) $5a < 7a$; г) $-6a + 1 < -5a + 1$.

896. Известно, что $a < b$. Является ли верным неравенство:

а) $a + 6 < b + 12$; в) $3a < 3b + 1$;
б) $a - 4 < b - 1$; г) $-2a > -2b$?

897. Докажите, что если $a > b > 0$, то:

а) $26a > 12b$; б) $-1{,}3a < -1{,}2b$.

898. Верно ли, что:

а) если $a > 2$, то $a^2 > 2a$;
б) если $a < 2$, то $a^2 < 2a$;
в) если $a > -5$, то $a^2 > -5a$;
г) если $a < -5$, то $a^2 < -5a$?

899. Известно, что $a > b$, $d < b$, $c > a$, причем a, b, c и d — положительные числа. Расположите в порядке возрастания числа $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$ и $\frac{1}{d}$.

900. Выполните почленное сложение неравенств:

а) $8 > -1$ и $1{,}5 > 1{,}3$; б) $-2{,}4 < -2{,}1$ и $0{,}6 < 1{,}3$.

901. Выполните почленное умножение неравенств:

а) $15 > 12$ и $0{,}3 > 0{,}2$; б) $\frac{1}{16} < \frac{1}{12}$ и $4 < 6$.

902. Известно, что $a < b$, причем a и b — положительные числа. Сравните:

а) a^3 и b^3; б) $-1{,}5a^5$ и $-1{,}5b^5$; в) $-a^7 - 3$ и $-b^7 - 3$.

903. Докажите, что в любом выпуклом четырехугольнике:

а) диагональ меньше полупериметра;
б) сумма расстояний от точки, взятой внутри четырехугольника, до его вершин больше полупериметра;
в) сумма одной пары противоположных сторон меньше суммы диагоналей.

904. Докажите, что в любом треугольнике сумма одной из сторон и высоты, опущенной на эту сторону, больше полупериметра.

Упражнения для повторения

905. При некоторых значениях x и y значение дроби $\frac{x-3y}{y}$ равно 0,7. Чему равно при тех же значениях x и y значение дроби $\frac{2y^2-5x^2}{x^2}$?

906. Замените «звездочку», если возможно, цифрой так, чтобы было верным утверждение:

а) число 76*4 кратно 18;

б) число 12 является делителем числа 83*4.

907[1]. Докажите равенство

$$\frac{\sqrt{9}+\sqrt{54}+\sqrt{450}+\sqrt{75}}{5+\sqrt{3}}=3\sqrt{2}+\sqrt{3}.$$

908. Найдите корни уравнения:

а) $x^2+2x-1=0$; в) $3x^2-2x-1=0$;

б) $2x^2-6x+3=0$; г) $3x^2+3x-1=0$.

38. Оценка значений выражений

Рассмотренные свойства неравенств позволяют оценить значение выражения с переменными, если известно, в каких границах заключены значения переменных.

Приведем примеры.

Пример 1. Зная, что $11,5<a<11,6$, оценим значение выражения $2a+3,2$.

Умножив обе части каждого из неравенств $11,5<a$ и $a<11,6$ на 2, получим, что $23<2a$ и $2a<23,2$. Прибавив к обеим частям каждого из полученных неравенств по 3,2, найдем, что $26,2<2a+3,2<26,4$. Запись удобно вести в виде цепочки двойных неравенств:

$$11,5<a<11,6;$$
$$23<2a<23,2;$$
$$26,2<2a+3,2<26,4.$$

Пример 2. Оценим периметр и площадь квадрата со стороной a см, если известно, что $1,2<a<1,3$.

[1] Задача индийского математика и астронома XII века Бхаскара.

Периметр P (в сантиметрах) квадрата со стороной a см равен $4a$, а площадь S (в квадратных сантиметрах) равна a^2.

Умножим почленно обе части каждого из неравенств $1{,}2 < a$ и $a < 1{,}3$ на 4. Получим:

$$1{,}2 \cdot 4 < 4a < 1{,}3 \cdot 4.$$

Значит,

$$4{,}8 < P < 5{,}2.$$

Выполняя почленно умножение неравенств $1{,}2 < a$ и $1{,}2 < a$, а также $a < 1{,}3$ и $a < 1{,}3$, где $a > 0$, и записывая результат в виде двойного неравенства, получим:

$$1{,}44 < a^2 < 1{,}69, \text{ т. е.}$$
$$1{,}44 < S < 1{,}69.$$

Зная границы, в которых заключены значения переменных x и y, можно, используя свойства неравенств, оценить их сумму, разность, произведение и частное.

Пример 3. Пусть известно, что $1{,}2 < x < 1{,}3$ и $0{,}4 < y < 0{,}5$. Оценим сумму $x + y$, разность $x - y$, произведение xy, частное $\frac{x}{y}$.

Выполняя сначала почленное сложение неравенств $1{,}2 < x$ и $0{,}4 < y$, а затем неравенств $x < 1{,}3$ и $y < 0{,}5$, находим, что $1{,}6 < x + y$ и $x + y < 1{,}8$, т. е. $1{,}6 < x + y < 1{,}8$.

Запись удобно вести короче:

$$\begin{array}{c} 1{,}2 < x < 1{,}3 \\ 0{,}4 < y < 0{,}5 \\ \hline 1{,}6 < x + y < 1{,}8. \end{array}$$

Для того чтобы оценить разность $x - y$, представим ее в виде суммы $x + (-y)$. Оценим сначала значение выражения $-y$. Из неравенства $0{,}4 < y < 0{,}5$ следует, что $-0{,}4 > -y > -0{,}5$, т. е. $-0{,}5 < -y < -0{,}4$. Теперь можно оценить сумму $x + (-y)$, т. е. выражение $x - y$. Имеем:

$$\begin{array}{c} 1{,}2 < x < 1{,}3 \\ -0{,}5 < -y < -0{,}4 \\ \hline 0{,}7 < x - y < 0{,}9. \end{array}$$

Учитывая, что значения переменных x и y заключены между положительными числами и потому являются положительными, мы можем оценить произведение xy, применяя теорему о почленном умножении неравенств сначала к неравенствам $1{,}2 < x$ и $0{,}4 < y$, а затем к неравенствам $x < 1{,}3$ и $y < 0{,}5$. При этом запись будем вести в виде двойных неравенств:

$$\begin{array}{c} 1{,}2 < x < 1{,}3 \\ 0{,}4 < y < 0{,}5 \\ \hline 0{,}48 < xy < 0{,}65. \end{array}$$

Чтобы оценить частное $\frac{x}{y}$, представим его в виде произведения $x \cdot \frac{1}{y}$. Воспользовавшись следствием о соотношении между числами, обратными некоторым положительным числам, получаем, что так как $0{,}4 < y < 0{,}5$, то $\frac{1}{0{,}4} > \frac{1}{y} > \frac{1}{0{,}5}$, т. е. $2 < \frac{1}{y} < 2{,}5$.

Теперь можно оценить произведение $x \cdot \frac{1}{y}$, т. е. частное $\frac{x}{y}$:

$$\begin{array}{c} 1{,}2 < x < 1{,}3 \\ 2 < \frac{1}{y} < 2{,}5 \\ \hline 2{,}4 < \frac{x}{y} < 3{,}25. \end{array}$$

Пример 4. Сравним приращения, которые функция $y = \sqrt{x}$ получает при изменении x от 14 до 15 и от 44 до 45.

Требуется сравнить разности $\sqrt{15} - \sqrt{14}$ и $\sqrt{45} - \sqrt{44}$. Каждую из них представим в виде дроби со знаменателем 1 и освободимся от иррациональности в числителе дроби. Получим:

$$\sqrt{15} - \sqrt{14} = \frac{(\sqrt{15} - \sqrt{14})(\sqrt{15} + \sqrt{14})}{1 \cdot (\sqrt{15} + \sqrt{14})} =$$

$$= \frac{(\sqrt{15})^2 - (\sqrt{14})^2}{\sqrt{15} + \sqrt{14}} = \frac{1}{\sqrt{15} + \sqrt{14}},$$

$$\sqrt{45} - \sqrt{44} = \frac{(\sqrt{45} - \sqrt{44})(\sqrt{45} + \sqrt{44})}{1 \cdot (\sqrt{45} + \sqrt{44})} =$$

$$= \frac{(\sqrt{45})^2 - (\sqrt{44})^2}{\sqrt{45} + \sqrt{44}} = \frac{1}{\sqrt{45} + \sqrt{44}}.$$

Так как $\sqrt{15}+\sqrt{14} < \sqrt{45} + \sqrt{44}$, то $\dfrac{1}{\sqrt{15}+\sqrt{14}} > \dfrac{1}{\sqrt{45}+\sqrt{44}}$,

т. е. в первом случае функция получает большее приращение, чем во втором.

909. Зная, что $4,2 < x < 4,5$, оцените:

а) $-5x$; б) $3x - 8$; в) $6 - x$; г) $\dfrac{1}{x} + 1$; д) $x^2 + 1,2$.

910. Зная, что ребро куба равно a см, где $4,5 < a < 4,6$, оцените объем и поверхность куба.

911. Известно, что $9,2 < a < 9,3$ и $0,2 < b < 0,3$. Оцените $a + b$, $a - b$, ab и $\dfrac{a}{b}$.

912. В треугольнике со сторонами a см, b см и c см, где $2,3 \leqslant a \leqslant 2,4$, $3,2 \leqslant b \leqslant 3,3$ и $4,5 \leqslant c \leqslant 4,6$, соединены середины сторон. Оцените периметр образовавшегося треугольника.

913. Оцените периметр и площадь прямоугольника со сторонами a см и b см, где $5,6 \leqslant a \leqslant 5,8$; $12,1 \leqslant b \leqslant 12,2$.

914. Измеряя длину a м и ширину b м садового участка прямоугольной формы, нашли, что $a = 28,2 \pm 0,1$, $b = 22,6 \pm 0,1$. Оцените площадь этого участка и длину изгороди, ограждающей его.

915. Фирма хочет снять под офис комнату площадью не менее 50 м^2. Подойдет ли для этого комната, длина которой a м и ширина b м, если $a = 7,7 \pm 0,1$, $b = 7,2 \pm 0,1$?

916. Существует ли треугольник со сторонами a см, b см и c см, если известно, что $4,2 \leqslant a \leqslant 4,3$, $3,6 \leqslant b \leqslant 3,8$ и $9,1 \leqslant c \leqslant 9,2$?

917. Стороны треугольника равны a см, b см, c см. Оцените c, зная, что $2,3 \leqslant a \leqslant 2,4$; $1,8 \leqslant b \leqslant 1,9$.

918. Известно, что $12,5 < x < 12,6$ и $15,3 < y < 15,6$. Может ли сумма $x + y$ быть равной числу:

а) 27,5; б) 28; в) 27,85; г) 28,13?

919. Зная, что $3,4 < x < 3,5$ и $1,4 < y < 1,5$, оцените значение выражения:

а) $2x + y$; б) $x - 2y$; в) $5xy$; г) $xy - 2$.

920. Пользуясь тем, что $1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$ и $2{,}2 < \sqrt{5} < 2{,}3$, оцените:

а) $\sqrt{5} + \sqrt{2}$;

б) $\sqrt{5} - \sqrt{2}$;

в) $3\sqrt{10}$.

921. Пользуясь тем, что $2{,}4 < \sqrt{6} < 2{,}5$ и $3{,}3 < \sqrt{11} < 3{,}4$, оцените:

а) $\sqrt{11} + \sqrt{6}$;

б) $\sqrt{11} - \sqrt{6}$;

в) $2\sqrt{66}$.

Рис. 40

922. Для бега устроена дорожка, ограниченная двумя концентрическими окружностями, радиусы которых равны r см и R см. Зная, что $3{,}14 < \pi < 3{,}15$, оцените площадь этой дорожки, если $350 < r < 351$ и $570 < R < 571$.

923. Умывальник имеет форму полуцилиндра (рис. 40). Зная, что высота цилиндра равна h см, где $34 < h < 35$, а радиус основания равен r см, где $10 < r < 11$, оцените, сколько жести израсходовано на изготовление:

а) его задней стенки;

б) его передней стенки;

в) дна и крышки.

Указание. Воспользуйтесь тем, что боковая поверхность цилиндра равна $2\pi rh$, $3{,}14 < \pi < 3{,}15$.

924. Сосуд имеет форму цилиндра, высота которого равна h см, а радиус основания r см, где $25 < h < 26$, $15 < r < 16$. Зная, что объем цилиндра вычисляется по формуле $V = \pi r^2 h$ и $3{,}14 < \pi < 3{,}15$, оцените вместимость сосуда.

925. Докажите, что приращение, которое функция $y = \sqrt{x}$ получает при изменении x от 23 до 25, меньше приращения, которое она получает при изменении x от 13 до 15.

926. Докажите неравенство:

а) $\sqrt{6} + \sqrt{15} > \sqrt{2} + \sqrt{19}$;

б) $\sqrt{5} - \sqrt{2} > 2 - \sqrt{3}$;

в) $\sqrt{3} + 2\sqrt{2} < 2 + \sqrt{7}$;

г) $\sqrt{5} + \sqrt{2} > \sqrt{6} + 1$.

927. Сравните значения выражений:

а) $\sqrt{13}-\sqrt{3}$ и $\sqrt{12}+2$; в) $5\sqrt{2}+3\sqrt{7}$ и $6\sqrt{5}$;

б) $\sqrt{17}+\sqrt{7}$ и $3\sqrt{2}+\sqrt{6}$; г) $3\sqrt{5}+7\sqrt{2}$ и $9\sqrt{3}$.

928. Докажите, что сумма медиан треугольника больше его полупериметра, но меньше периметра.

929. Зная, что $1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$, оцените:

а) $\frac{4}{\sqrt{2}}$; б) $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$; в) $\sqrt{3-2\sqrt{2}}$; г) $\frac{7}{\sqrt{43-30\sqrt{2}}}$.

Упражнения для повторения

930. При каком натуральном q корни уравнения $x^2-6x+q=0$ являются натуральными числами?

931. При каком целом q корни уравнения $x^2+8x+q=0$ являются целыми числами?

932. Решите уравнение:

а) $\frac{(4x-1)(x+3{,}5)}{4}-\frac{(2x+1)(x-10{,}5)}{2}=37{,}5$;

б) $\frac{(x+1)(4x-1)}{12}-\frac{(4-x)^2}{3}=15$.

933. Выделите квадрат двучлена из квадратного трехчлена:

а) $x^2-12x+55$; б) a^2-3a+7.

934. Найдите пересечение и объединение числовых промежутков:

а) $(-\infty; 6)$ и $(-6; +\infty)$; б) $[2; +\infty)$ и $[0; +\infty)$.

39. Доказательство неравенств

О неравенствах

$$a^2+4>0,\ (a-5)^2\geqslant 0,\ -a^2-8<0$$

можно сразу сказать, что каждое из них верно при любом значении a.

Иначе обстоит дело с неравенством $a^2-a+1>0$. Нетрудно убедиться, что при значениях a, равных 0; 2; $5\frac{1}{3}$, данное неравенство верно. Чтобы убедиться в том, что оно верно при любом a, преобразуем трехчлен $a^2 - a + 1$, выделив из него квадрат двучлена:

$$a^2 - a + 1 = a^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot a + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 1 = \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}.$$

Выражение $\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$ при любом a принимает положительное значение. Следовательно, при любом a является верным неравенство $a^2 - a + 1 > 0$.

Выполнив преобразование, мы, как говорят, доказали неравенство. Для доказательства неравенств используют различные приемы. Один из приемов состоит в том, что рассматривается разность между левой и правой частями неравенства и доказывается, что при любых значениях переменных эта разность сохраняет знак.

Пример 1. Докажем, что произведение любых двух чисел не превосходит полусуммы их квадратов.

Требуется доказать, что при любых значениях a и b верно неравенство

$$ab \leqslant \frac{a^2+b^2}{2}.$$

Составим разность левой и правой частей неравенства и преобразуем ее:

$$ab - \frac{a^2+b^2}{2} = \frac{2ab-a^2-b^2}{2} = \frac{-(a^2+b^2-2ab)}{2} = \frac{-(a-b)^2}{2}.$$

При любых значениях a и b рассматриваемая разность является неположительным числом. Значит, при любых a и b верно неравенство $ab \leqslant \frac{a^2+b^2}{2}$.

Заметим, что если в доказанном неравенстве заменить переменные a и b на $\sqrt{x}$ и $\sqrt{y}$, то получим $\sqrt{xy} \leqslant \frac{x+y}{2}$ — неравенство между средним геометрическим и средним арифметическим чисел x и y, доказанное еще Евклидом в X книге «Начал».

Пример 2. Докажем неравенство

$$x^2 + y^2 > 12x + 18y - 120.$$

Составим разность левой и правой частей неравенств и преобразуем ее, выделяя квадраты двучленов:

$$x^2 + y^2 - (12x + 18y - 120) =$$
$$= (x^2 - 12x + 36) + (y^2 - 18y + 81) + 120 - 36 - 81 =$$
$$= (x - 6)^2 + (y - 9)^2 + 3.$$

Так как $(x - 6)^2 \geqslant 0$ при любом x и $(y - 9)^2 \geqslant 0$ при любом y, то выражение $(x - 6)^2 + (y - 9)^2 + 3$ при любых значениях x и y принимает положительное значение. Значит, при любых x и y верно неравенство

$$x^2 + y^2 > 12x + 18y - 120.$$

Пример 3. Докажем, что куб полусуммы любых двух положительных чисел не превосходит полусуммы их кубов.

Пусть a и b — произвольные положительные числа. Требуется доказать, что

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^3 \leqslant \frac{a^3+b^3}{2}.$$

Составим разность левой и правой частей неравенства и преобразуем ее:

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^3 - \frac{a^3+b^3}{2} =$$

$$= \frac{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3-4a^3-4b^3}{8} = \frac{3a^2b+3ab^2-3a^3-3b^3}{8} =$$

$$= \frac{3a^2(b-a)-3b^2(b-a)}{8} = \frac{(b-a)\left(3a^2-3b^2\right)}{8} = -\frac{3(a-b)^2(a+b)}{8}.$$

При $a > 0$, $b > 0$ составленная разность равна отрицательному числу или нулю. Значит, при $a > 0$, $b > 0$ рассматриваемое неравенство верно.

Еще один прием доказательства неравенств состоит в том, чтобы показать, что данное неравенство следует из некоторых других неравенств, справедливость которых легко устанавливается.

Пример 4. Докажем неравенство

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + ac + bc.$$

Для того чтобы установить, что неравенство верно при любых значениях a, b и c, покажем, что оно следует из очевидных неравенств. В качестве таких очевидных неравенств возьмем неравенства:

$$a^2 + b^2 \geqslant 2ab,$$
$$a^2 + c^2 \geqslant 2ac,$$
$$b^2 + c^2 \geqslant 2bc.$$

Применив к ним теорему о почленном сложении неравенств, получим:

$$a^2 + b^2 + a^2 + c^2 + b^2 + c^2 \geqslant 2ab + 2ac + 2bc.$$

Отсюда

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \geqslant 2ab + 2ac + 2bc, \text{ т. е.}$$
$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + ac + bc.$$

Неравенство доказано.

Пример 5. Докажем, что если $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, то

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geqslant 9\,.$$

Преобразуем левую часть неравенства:

$$(a+b+c)-\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)= \frac{(a+b+c)(bc+ac+ab)}{abc} =$$

$$=\frac{abc+b^2c+bc^2+a^2c+abc+ac^2+a^2b+ab^2+abc}{abc} =$$

$$=1 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} + \frac{a}{b} +1+ \frac{c}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{c} +1= 3+\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)+\left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right)+\left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right).$$

Нетрудно проверить, что при указанных значениях переменных верны неравенства

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqslant 2,\ \frac{a}{c} + \frac{c}{a} \geqslant 2,\ \frac{b}{c} + \frac{c}{b} \geqslant 2.$$

Значит,

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geqslant 3+2+2+2, \text{ т. е. } (a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geqslant 9.$$

Неравенство доказано.

Пример 6. Докажем неравенство

$$\sqrt{(a+c)(b+d)} \geqslant \sqrt{ab} + \sqrt{cd}$$

при $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $d > 0$.

Применить прием, использованный в предыдущем примере, здесь не удастся, поэтому поступим иначе. Воспользуемся тем, что при указанных значениях переменных левая и правая части неравенства являются положительными числами, и покажем, что неравенство того же смысла выполняется для их квадратов, т. е. докажем, что

$$\left(\sqrt{(a+c)(b+d)}\right)^2 \geqslant \left(\sqrt{ab} + \sqrt{cd}\right)^2$$

при $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $d > 0$.

Преобразуем разность левой и правой частей этого неравенства:

$$\left(\sqrt{(a+c)(b+d)}\right)^2 - \left(\sqrt{ab} + \sqrt{cd}\right)^2 =$$

$$= (a + c)(b + d) - \left(ab + 2\sqrt{abcd} + cd\right) =$$

$$= ab + bc + ad + cd - ab - 2\sqrt{abcd} - cd =$$

$$= bc + ad - 2\sqrt{abcd} = \left(\sqrt{bc} - \sqrt{ad}\right)^2.$$

Рассмотренная разность неотрицательна.

Значит,

$$\left(\sqrt{(a + c)(b + d)}\right)^2 \geqslant \left(\sqrt{ab} + \sqrt{cd}\right)^2.$$

Так как выражения $\sqrt{(a+c)(b+d)}$ и $\sqrt{ab} + \sqrt{cd}$ принимают положительные значения при указанных значениях переменных, то можно сделать вывод, что

$$\sqrt{(a+c)(b+d)} \geqslant \sqrt{ab} + \sqrt{cd} \text{ при } a > 0,\ b > 0,\ c > 0,\ d > 0,$$

т. е. неравенство доказано.

935. Из данных неравенств выберите те, которые верны при любых значениях a:

а) $15a^2 + 4 > 0$; в) $-a^2 - 2 < 0$;
б) $(a + 8)^2 > 0$; г) $(-a)^2 + a^2 > 0$.

936. Докажите неравенство:

а) $(3x - 1)(2x - 2) > x(6x - 8)$;
б) $(3b - 4)(2b + 8) < (6b - 2)(b + 3)$;
в) $3a(a - 1) - 5a^2 < 4 - 3a$;
г) $(2c - 6)(c - 1) > c(c - 8)$.

937. Верно ли при любом значении x неравенство:

а) $(6x - 1)(x + 1) > (2x + 3)(3x - 2)$;

б) $(5 - 2x)(3 + x) < 2x(1 - x)$;

в) $(5 - x)^2 > (x + 8)(x - 18)$;

г) $(12 - x)(x + 12) > 3x(6 - x) + 2x(x - 9)$?

938. Используя выделение квадрата двучлена, докажите неравенство:

а) $x^2 - 6x + 15 > 0$; в) $y^2 > 4y - 5$;

б) $a^2 - 8a + 19 > 0$; г) $8b - 18 < b^2$.

939. Докажите неравенство:

а) $x^2 - x + 8 > 0$; в) $4y^2 > 4y - 12$;

б) $4a^2 + 4ab + 3b^2 \geqslant 0$; г) $9x^2 \geqslant 6xy - 7y^2$.

940. Докажите неравенство:

а) $\dfrac{(3a-2)^2}{6} + 2a > 0$; в) $\dfrac{a^2+3}{4} - \dfrac{a}{2} > 0$;

б) $\dfrac{(5x-1)^2}{2} + 5x > 0$; г) $\dfrac{(b-6)^2}{10} + \dfrac{b}{5} > 0$.

941. Докажите неравенство:

а) $x^2 + y^2 + 18x - 6y + 100 > 0$;

б) $a^2 + b^2 + 20 - 2a + 2b > 0$;

в) $4x^2 + a^2 > 4x - 2a - 28$;

г) $9b^2 + 4c^2 + 2 \geqslant 6b - 4c$.

942. Впишите вместо многоточия какое-либо число так, чтобы полученное неравенство было верно при любых значениях a и b:

а) $a^2 + b^2 - 8a - 16b + \ldots > 0$;

б) $a^2 - 4a + b^2 - 4b + \ldots > 0$;

в) $4a^2 + b^2 + 12a - 4b + \ldots > 0$;

г) $9a^2 + 16b^2 - 6a - 8b + \ldots > 0$.

943. Докажите неравенство:

а) $x^2 + 4y^2 - 4xy + 2x - 4y + 3 > 0$;

б) $2x^2 + y^2 - 2xy - 4x + 4y + 5 > 0$;

в) $x^2 - 4xy + 5y^2 + 2y + 2 > 0$;

г) $5x^2 + 4xy + y^2 + 4x + 6 > 0$.

944. Докажите, что:

а) если $b > 5$, то $\frac{b-1}{2} - 2 > 0$;

б) если $x > 7$, то $4 - \frac{x+3}{5} < 2$.

945. Докажите, что:

а) $a + \frac{4}{a} > 4$ при $a > 0$; б) $\frac{9}{y} > 6 - y$ при $y > 3$.

946. Докажите, что если $a > 0$ и $b > 0$, то:

а) $\frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2} \geqslant \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$; б) $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} \geqslant a + b$.

947. Докажите, что сумма двух положительных взаимно обратных чисел не меньше 2.

948. Докажите неравенство:

а) $a^2 + \frac{1}{a^2} \geqslant 2$ при $a \neq 0$; б) $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqslant 2$ при $ab > 0$.

949. Докажите, что во всяком треугольнике полупериметр больше каждой из сторон.

950. Докажите, что если a, b, c — стороны треугольника, то $a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + ac + bc)$.

951. Докажите, что если $a > 0$, $b > 0$, то:

а) $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)(a + b) \geqslant 4$; б) $\frac{(a+b)^4 - (a-b)^4}{ab} > 0$.

952. Докажите, что при любых a, b и c:

а) $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 2(a + b + c) - 3$;

б) $(a + b + c)^2 \geqslant 3(ab + ac + bc)$;

в) $(a + b - c)^2 + (a - b + c)^2 + (b + c - a)^2 \geqslant ab + bc + ac$.

953. Докажите, что при $a > 0$ и $b > 0$ верно неравенство:

а) $\sqrt{a} + \sqrt{b} \geqslant \sqrt{a+b}$; б) $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geqslant \frac{a+b}{2}$.

954. Докажите, что если $a > 0$ и $b > 0$, то:

а) $\frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{a}} \geqslant \sqrt{a} + \sqrt{b}$; б) $(a + b)\sqrt{ab} \geqslant 2ab$.

955. Пользуясь соотношением между средним арифметическим и средним геометрическим двух положительных чисел, докажите неравенство:

а) $(a + b)(b + c)(a + c) \geqslant 8abc$ при $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$;

б) $(a + 1)(b + 1) \geqslant 4\sqrt{ab}$ при $a > 0$, $b > 0$;

в) $\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ac} \leqslant a + b + c$ при $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$;

г) $\sqrt{(a+b)(c+d)} \leqslant \frac{1}{2}(a + c) + \frac{1}{2}(b + d)$ при $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $d > 0$.

956. Зная, что $a > 0$, $b > 0$, $a < b$, расположите в порядке возрастания числа:

$$a;\ b;\ \frac{a+b}{2};\ \sqrt{ab};\ \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}};\ \frac{2ab}{a+b}.$$

957. Увеличится или уменьшится дробь $\frac{a}{b}$, где $a \in N$, $b \in N$, если к ее числителю и знаменателю прибавить по 1? (Рассмотрите случаи, когда $a < b$ и $a > b$).

958. Расстояние между пунктами A и B равно 54 км. Мотоциклист рассчитал, с какой скоростью он должен ехать из A в B и обратно, чтобы вернуться в пункт A к намеченному сроку. Однако из A в B он ехал со скоростью на 1 км/ч меньшей, а возвращался со скоростью на 1 км/ч больше, чем планировал. Докажите, что он не успел вернуться в A к намеченному сроку.

959. Одна группа туристов проехала 16 км по озеру, а другая проехала 8 км по течению реки и 8 км против течения реки. Скорость течения реки 2 км/ч. Какая из групп затратила на весь путь больше времени, если известно, что они использовали моторные лодки, имеющие одинаковую собственную скорость?

Упражнения для повторения

960. Найдите пересечение числовых промежутков:

а) $(-\infty; 4{,}8)$ и $(-\infty; 4)$;

б) $(7{,}2; +\infty)$ и $(7{,}7; +\infty)$;

в) $(-\infty; 6{,}5)$ и $(3; +\infty)$;

г) $(-\infty; -9)$ и $(-8; +\infty)$.

961. Найдите наименьшее натуральное число, которое при делении на 7 дает остаток 3, а при делении на 3 — остаток 2.

962. Постройте график функции:

а) $y = 0{,}5x - 3$; б) $y = -0{,}5x + 1$.

963. Решите уравнение:

а) $\frac{(3x-2)(x+1)}{3} - x(x+11) = 0{,}4$;

б) $\frac{(6x-2)(x+0{,}5)}{6} - (x+1)(x+0{,}5) = 1$.

Контрольные вопросы и задания

1. Сравните числа a и b, если разность $a - b$ равна -27; $3{,}2$; 0. Сформулируйте определение, которое было использовано при сравнении чисел.

2. Сформулируйте теоремы, выражающие свойства числовых неравенств, и докажите их.

3. Разъясните на примере, как оценить сумму, разность, произведение и частное чисел a и b, если $8 < a < 12$ и $5 < b < 6$.

4. Докажите неравенство

$$(4x - 1)(x + 1) > (3x + 6)(x - 1).$$

Разъясните, в чем состоит примененный вами прием доказательства неравенства.

§ 13. РЕШЕНИЕ НЕРАВЕНСТВ С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ И ИХ СИСТЕМ

40. Решение неравенств с одной переменной

Задача. Туристы выехали на моторной лодке по течению реки и должны вернуться обратно к стоянке. Скорость лодки в стоячей воде равна 15 км/ч, а скорость течения реки 3 км/ч. На какое расстояние могут отъехать туристы, чтобы прогулка продолжалась менее 3 ч?

Пусть расстояние, на которое могут отъехать туристы, равно x км. Так как скорость лодки по течению реки равна 18 км/ч, а скорость лодки против течения реки равна 12 км/ч, то на путь по течению реки туристы затратят $\frac{x}{18}$ ч, а на путь против течения — $\frac{x}{12}$ ч. Всего в пути туристы будут находиться

$\frac{x}{18} + \frac{x}{12}$ часов. По условию прогулка должна продолжаться менее 3 ч. Значит,

$$\frac{x}{18} + \frac{x}{12} < 3.$$

Неравенство $\frac{x}{18} + \frac{x}{12} < 3$, составленное по условию задачи, является неравенством с одной переменной. Нетрудно проверить, что при значении переменной x, равном, например, 10, 18, 20, это неравенство верно. Говорят, что каждое из чисел 10, 18, 20 является решением неравенства.

Определение. **Решением неравенства с одной переменной называется значение переменной, которое обращает его в верное числовое неравенство.**

Решить неравенство — значит найти множество его решений, иначе говоря, решить неравенство — значит найти все его решения или доказать, что их нет.

Определение. **Неравенства, множества решений которых совпадают, называются равносильными.**

В частности, неравенства, не имеющие решений, являются равносильными.

При решении неравенств стремятся данное неравенство заменить более простым, равносильным ему, для которого множество решений легко указать.

Для того чтобы сформулировать условия перехода к равносильному неравенству, введем понятие области определения неравенства.

Определение. **Областью определения неравенства с одной переменной называется множество значений переменной, при которых обе части неравенства имеют смысл.**

Например, областью определения неравенства $\frac{3x-1}{2} > 5x + 4$ является множество всех чисел, а неравенства $\frac{6}{x-3} > x + 1$ — множество, состоящее из всех чисел, кроме 3.

Для неравенств с одной переменной справедливы свойства, аналогичные свойствам уравнений с одной переменной.

Из данного неравенства получается равносильное ему неравенство, если:

1) ***из одной части неравенства перенести в другую слагаемое с противоположным знаком;***

2) обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же положительное число;

обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же отрицательное число, изменив знак неравенства на противоположный;

3) в какой-либо части неравенства или в обеих его частях выполнить тождественное преобразование, не меняющее области определения неравенства.

Первые два свойства можно доказать, используя свойства числовых неравенств. Третье свойство вытекает из того, что в результате тождественного преобразования получается выражение, значение которого совпадает со значением исходного выражения при всех допустимых значениях переменных.

Заметим, что требование сохранения области определения неравенства является существенным. Так, например, если в неравенстве $3x + \frac{1}{x} - \frac{1}{x} > -6$ заменить нулем разность $\frac{1}{x} - \frac{1}{x}$, то получится неравенство $3x > -6$, которое не равносильно данному. Действительно, число 0 является решением второго, но не является решением первого, так как при $x = 0$ левая часть первого неравенства не имеет смысла.

Рассмотрим примеры решения неравенств. Начнем с простейших неравенств вида $ax > b$ и $ax < b$, где a и b — некоторые числа. Неравенства такого вида называются *линейными неравенствами* с одной переменной.

Пример 1. Решим неравенство:

а) $0{,}2x > 4$; б) $-18x > 5{,}4$.

Заменим каждое из неравенств равносильным ему неравенством вида $x > a$ или $x < a$, где a — некоторое число.

а) Разделив обе части неравенства на 0,2, получим:

$$x > 20.$$

Множеством решений этого неравенства является числовой промежуток $(20; +\infty)$ (рис. 41). Ответ можно записать как в виде промежутка $(20; +\infty)$, так и в виде неравенства, задающего этот промежуток.

Рис. 41

Рис. 42

б) Разделим обе части неравенства на отрицательное число -18, изменив при этом знак неравенства на противоположный. Получим:

$$x < -0,3.$$

Множество решений неравенства — числовой промежуток $(-\infty; -0,3)$ (рис. 42).

Особый случай представляют собой неравенства вида $0x < b$ и $0x > b$, где b — некоторое число. Неравенство такого вида либо не имеет решений, либо решением неравенства является любое число.

Пример 2. Решим неравенство:

а) $0x < 7$; б) $0x < -3$.

а) Так как произведение $0x$ равно 0, то неравенство верно при любом значении x. Множеством решений неравенства является множество всех действительных чисел, т. е. промежуток $(-\infty; +\infty)$.

б) Так как произведение $0x$ при любом x равно 0, то заданное неравенство не имеет решений.

При решении более сложных неравенств стремятся, применяя тождественные преобразования и сформулированные выше свойства неравенств с переменными, заменить данное неравенство простейшим неравенством вида $ax > b$ или $ax < b$.

Пример 3. Решим неравенство

$$2x(8x - 3) - (4x - 1)^2 < 13 - x.$$

Раскроем скобки в левой части неравенства:

$$16x^2 - 6x - 16x^2 + 8x - 1 < 13 - x.$$

Перенесем слагаемые -1 и $-x$ с противоположными знаками из одной части неравенства в другую и выполним приведение подобных членов:

$$16x^2 - 6x - 16x^2 + 8x + x < 13 + 1,$$
$$3x < 14.$$

Разделив обе части неравенства на 3, найдем, что

$$x < 4\frac{2}{3}.$$

Мы последовательно заменяли одно неравенство другим, равносильным ему. В результате получили неравенство $x < 4\frac{2}{3}$, равносильное исходному. Множеством решений полученного неравенства, а значит, и исходного неравенства, является числовой промежуток $\left(-\infty; 4\frac{2}{3}\right)$.

Пример 4. Вернемся к задаче, рассмотренной в начале пункта. Решим составленное неравенство

$$\frac{x}{18} + \frac{x}{12} < 3.$$

Умножим обе части неравенства на наименьший общий знаменатель дробей, т. е. на 36. Получим:

$$\left(\frac{x}{18} + \frac{x}{12}\right) \cdot 36 < 3 \cdot 36,$$

$$\frac{x}{18} \cdot 36 + \frac{x}{12} \cdot 36 < 108,$$

$$2x + 3x < 108.$$

Выполним приведение подобных членов:

$$5x < 108.$$

Разделив обе части неравенства на 5, найдем, что

$$x < 21{,}6.$$

Теперь можно ответить на вопрос задачи: туристы могут отплыть на расстояние, меньшее чем 21,6 км.

964. Является ли решением неравенства

$$5x^3 + 1 < 3x^2 + x$$

число:

а) -3; б) -2; в) -1; г) 0; д) 2?

965. Решите неравенство:

а) $-3x > -27$; г) $-0{,}2x \leqslant \frac{1}{7}$; ж) $0x < -18$;

б) $0{,}5x \leqslant 22$; д) $-\frac{1}{7}x < -0{,}3$; з) $(\sqrt{3} - 1)x \geqslant 2$;

в) $-x \geqslant 1$; е) $0x > -4$; и) $(\sqrt{3} - 2)x < 2 - \sqrt{3}$.

966. Решите неравенство и изобразите на координатной прямой множество его решений:

а) $6 + 2x > 1$; д) $0{,}6x + 2 > 6 - x$;
б) $2 - 7x < 0$; е) $0{,}2x - 11 < 4 + 0{,}5x$;
в) $1 - 0{,}4x \leqslant 1$; ж) $1{,}7x + 4 \geqslant 2 + 1{,}5x$;
г) $2 - 0{,}8x > 4$; з) $2 - 3x \leqslant 1{,}4 - 2x$.

967. При каких значениях x двучлен $0{,}7x - 7$ принимает:
а) положительные значения;
б) отрицательные значения;
в) значения, большие 7;
г) значения, меньшие -1?

968. Функция задана формулой $y = 0{,}5x + 1$. При каких значениях x:

а) $y = 0$; б) $y > 0$; в) $y < 0$?

Постройте график функции и проиллюстрируйте свой ответ на графике.

969. Функция задана формулой $y = -0{,}5x + 2$. При каких значениях x функция принимает положительные и при каких отрицательные значения? Найдите ответ двумя способами:
а) решив соответствующее неравенство;
б) построив график функции.

970. При каких значениях p:

а) $|p| = p$; в) $|0{,}8 - 0{,}3p| = 0{,}8 - 0{,}3p$;
б) $|p - 1| = 1 - p$; г) $|1{,}4 - 6p| = 6p - 1{,}4$?

971. Решите неравенство:
а) $2(3 - x) - (4x - 1) < x + 6$;
б) $4(2a - 1) - 3(a + 6) > a$;
в) $3(2y - 5) + 2(3y - 5) < 6y$;
г) $0{,}8(2 - x) - 0{,}6(3 - 2x) < 4$;
д) $0{,}5(6 - x) + (1 + 3x) > 0{,}2$;
е) $0{,}6(2x + 1) - 0{,}4(3x + 2) > 1$.

972. Решите неравенство:
а) $3x(2x - 1) - 6x^2 > 2 - x$;
б) $12y^2 - (3y + 4)4y > y - 10$;
в) $(1 + 3x)(3x - 1) > 6x + 9x^2$;
г) $(4x - 3)(3 + 4x) + x < 16x^2$.

973. Решите неравенство:

а) $(x-2)^3 + x^2(6-x) < (3x-1)^2 - 9x(x+2)$;

б) $6(y+1)(y^2-y+1) - 2y(3y^2-1) \geqslant 5(0{,}2y-1)$;

в) $(2x+1)^3 - 4x^2(2x+3) > (0{,}2+x)(x-0{,}2) - x(x-2)$;

г) $(4y^2+1+2y)(2y-1) - 2y(4y^2+3) \leqslant 2{,}5(2-3y)$.

974. Найдите наибольшее целое число, удовлетворяющее неравенству:

а) $5{,}6(3+y) - 1{,}6(2+y) < 0$;

б) $8{,}4(3-y) + 1{,}2(2y-1) > 39$.

975. Найдите наименьшее целое число, удовлетворяющее неравенству:

а) $0{,}3(6-x) - 0{,}5(1-2x) > 11$;

б) $0{,}8(1-4x) + 0{,}5(2+6x) < 26$.

976. При каких значениях b равносильны неравенства:

а) $b^2x > 5$ и $x > \frac{5}{b^2}$; в) $bx > 8 + 3x$ и $x > \frac{8}{b-3}$;

б) $b^3x < 2$ и $x > \frac{2}{b^3}$; г) $2bx - 4 < 3x$ и $x > \frac{4}{2b-3}$?

977. При каких значениях a множеством решений неравенства:

а) $0{,}3x - 6 < a$ является числовой промежуток $(-\infty; 4)$;

б) $8x > 1{,}8a + x$ является числовой промежуток $(6; +\infty)$?

978. Решите относительно x неравенство:

а) $(m+1)x - 4 < (1-3m)x + 2$, если $m > 0$;

б) $(2+m)x + 6 < (2-3m)x - 1$, если $m < 0$.

979. Известно, что A — множество решений неравенства $3x - 1 < a$, где a — некоторое число. Укажите три каких-либо значения a, при которых числовой промежуток $[5; 8]$ является подмножеством множества A.

980. Известно, что A — множество решений неравенства $2x - 1 < 5{,}8$, B — множество решений неравенства $x - 1 < m$, где m — некоторое число. Укажите наименьшее натуральное значение m, при котором выполняется соотношение:

а) $A \subset B$;

б) $B \subset A$.

981. Решите неравенство:

а) $\frac{5x}{3} < 2$; в) $\frac{6+0,5x}{7} < 11$; д) $\frac{26-0,7x}{5} \geqslant 1$;

б) $\frac{0,3x}{4} > 1,5$; г) $\frac{12-0,2x}{9} > -7$; е) $\frac{11-0,3x}{2} \leqslant 5$.

982. При каких значениях x:

а) значение дроби $\frac{1,6-12x}{8}$ положительно;

б) значение дроби $\frac{1,5+7x}{5}$ отрицательно?

983. Решите неравенство:

а) $\frac{1}{6}(0,2x - 4) > 2$; г) $\frac{y}{12} - \frac{y}{8} \geqslant \frac{1}{3}$;

б) $\frac{2}{3}(0,1x - 1) < -0,6$; д) $\frac{0,3y}{4} - \frac{0,1y-1}{12} < -0,3$;

в) $\frac{x}{4} - \frac{x}{2} < 1,5$; е) $\frac{0,1y}{6} - \frac{0,3y+2}{12} \geqslant -\frac{1}{4}$.

984. Решите неравенство и покажите множество его решений на координатной прямой:

а) $\frac{2x-1}{4} - \frac{3x}{2} > 0$; в) $\frac{103-2x}{15} + \frac{x-104}{20} < 2$;

б) $\frac{5-3x}{6} + \frac{2x}{9} \leqslant 1$; г) $\frac{82-3x}{12} - \frac{43-x}{8} \geqslant 2$.

985. При каких значениях a:

а) сумма дробей $\frac{0,3-0,2a}{6}$ и $\frac{0,1a-1,5}{12}$ меньше 5;

б) разность дробей $\frac{0,6a-1}{8}$ и $\frac{3+0,05a}{4}$ больше 6?

986. Решите неравенство:

а) $\frac{8-3x}{2} - x < 5$; г) $3 - 2x - \frac{6+4x}{3} > 0$;

б) $x > 4 + \frac{2-x}{4}$; д) $1 + \frac{2(1,5-x)}{5} - x \leqslant 0$;

в) $7 \leqslant x - \frac{2(x-0,5)}{3}$; е) $0,7x + \frac{2x-4}{3} - \frac{x}{6} > 1$.

987. Решите неравенство:

а) $0,6x + \frac{3-x}{2} > \frac{1,3+1,1x}{2}$;   в) $2 \cdot \frac{1,3x+7}{5} < x - \frac{6x-2}{25}$;

б) $\frac{0,5x-1}{2} - x < 2 + \frac{3x}{2}$;   г) $3 \cdot \frac{0,5x-1}{2} - \frac{x}{8} > 0,3x$.

988. Найдите все целые отрицательные значения x, при которых верно неравенство:

а) $\frac{x-5}{2} - 3x < 1$;   б) $\frac{3-2x}{4} - \frac{x}{2} < 3$.

989. Найдите наибольшее натуральное значение p, при котором верно неравенство:

а) $0,6p + \frac{3-p}{2} < \frac{8,6+0,1p}{4}$;

б) $2 - \frac{0,5p+40,5}{6} + \frac{3p}{8} < -\frac{p}{2}$.

990. Сколько элементов содержит множество M, если:

а) $M = \left\{x \,\middle|\, x \in N,\ x - 1 < \frac{2x-1}{3} + \frac{x}{2}\right\}$;

б) $M = \left\{x \,\middle|\, x \in N,\ x + 1 \geqslant \frac{x-1}{3} + \frac{3x}{2}\right\}$;

в) $M = \left\{x \,\middle|\, x \in Z,\ \frac{2x-1}{3} + 1 < x - \frac{x}{3}\right\}$?

991. При каких значениях переменной x имеет смысл выражение:

а) $\sqrt{0,6x-1}$;   в) $\sqrt{2x+(x-1)^2}$;

б) $\sqrt{2-0,8x}$;   г) $\sqrt{2x-(x+1)^2}$?

992. Найдите область допустимых значений переменной в выражении:

а) $\frac{\sqrt{2x-3,2}}{2x-5}$;   в) $\frac{5-2x}{2-\sqrt{2x-1}}$;

б) $\frac{x^2-4x+3}{\sqrt{3-2x}}$;   г) $\frac{1-\sqrt{x-2}}{3-x}$.

993. Найдите все значения p, при которых квадратное уравнение $3x^2 - 2x + p = 0$:

а) не имеет корней;

б) имеет два различных корня;

в) имеет решение.

994. При каких значениях параметра a уравнение $(a - 2)x^2 - 4x - 5 = 0$ не имеет корней?

995. При каких значениях параметра b уравнение $(b + 1)x^2 + 2x + 1 = 0$ имеет два различных корня?

996. Решите относительно x уравнение и найдите, при каких значениях m корень уравнения является отрицательным числом:

а) $0{,}2(x - 3m) + 1{,}3(x + 2m) = 14$;

б) $0{,}6(3m - 2x) - 0{,}5(8m + x) = m + 16$.

997. В один резервуар налито 70 л воды, а в другом — 150 л. В первый резервуар в минуту вливается по 6 л, а из второго в минуту выливается по 10 л. В какие моменты времени в первом резервуаре будет меньше воды, чем во втором?

998. Из пункта A в пункт B отправился велосипедист со скоростью 15 км/ч. Спустя 30 мин навстречу ему из пункта B выехал другой велосипедист. С какой скоростью должен ехать второй велосипедист, чтобы встретиться с первым через 2 ч 30 мин после своего выезда в точке, расположенной ближе к пункту A?

999. Зная, что сумма углов выпуклого n-угольника равна $180°(n - 2)$, найдите наименьшее число сторон, начиная с которого эта сумма больше 1000°.

1000. Зная, что угол правильного n-угольника равен $\frac{180°(n-2)}{n}$, найдите наименьшее число сторон, начиная с которого этот угол больше 150°.

1001. Одна ремонтная мастерская берет по 37 р. за каждую облицовочную плитку и еще 1840 р. за работу, а другая берет по 43 р. за плитку и 1460 р. за работу. Укажите наименьшее число плиток, при котором выгоднее сделать заказ в первой мастерской, чем во второй.

1002. При каком значении c уравнение $4x^2 - 4(3c - 1)x + 1 - 6c = 0$ имеет:

а) два положительных корня;

б) два отрицательных корня;

в) положительный и отрицательный корни?

Упражнения для повторения

1003. Укажите все целые числа, принадлежащие множеству $A \cap B$, если:

а) $A = (-\infty;\ 1{,}5)$, $B = (-3{,}2;\ +\infty)$;

б) $A = (-\infty;\ 0)$, $B = (-2{,}3;\ +\infty)$.

1004. Укажите все дроби вида $\frac{1}{n}$, где $n \in N$, которые принадлежат промежутку $[0{,}1;\ 0{,}2]$.

1005. При делении на 7 одно число дает остаток 2, а другое — остаток 6. Какой остаток получится при делении на 7 произведения этих чисел?

1006. Найдите частное и остаток от деления квадратного трехчлена $x^2 + x - 8$ на двучлен $x - 5$.

41. Решение систем неравенств с одной переменной

Пусть даны линейные функции, заданные формулами $y = \frac{1}{3}x + 1$ и $y = -2x + 4$, и требуется найти множество значений x, при которых обе функции принимают положительные значения. Для этого надо найти множество общих решений неравенств $\frac{1}{3}x + 1 > 0$ и $-2x + 4 > 0$.

Если ставится задача найти множество общих решений двух или нескольких неравенств, то говорят, что надо решить *систему неравенств*.

О п р е д е л е н и е. **Решением системы неравенств с одной переменной называется значение переменной, при котором верно каждое из неравенств системы.**

Решить систему неравенств — значит найти множество ее решений. Иначе говоря, решить систему неравенств — значит найти все ее решения или доказать, что их нет. Множеством

решений системы является *пересечение множеств решений неравенств, входящих в эту систему*.

В записи для обозначения системы неравенств используют фигурную скобку.

Вернемся к задаче, поставленной в начале пункта. Для того чтобы ответить на вопрос задачи, надо решить систему неравенств

$$\begin{cases} \frac{1}{3}x + 1 > 0, \\ -2x + 4 > 0. \end{cases}$$

Заменяя последовательно каждое неравенство равносильным ему неравенством, получим:

$$\begin{cases} \frac{1}{3}x > -1, \\ -2x > -4; \end{cases} \qquad \begin{cases} x > -3, \\ x < 2. \end{cases}$$

Общими решениями неравенств $x > -3$ и $x < 2$ являются значения x, заключенные между числами -3 и 2, т. е. удовлетворяющие условию $-3 < x < 2$. Значит, множеством решений системы является числовой промежуток $(-3; 2)$. Этот вывод можно наглядно проиллюстрировать с помощью координатной прямой (рис. 43).

Рис. 43

Итак, мы нашли, что обе функции $y = \frac{1}{3}x + 1$ и $y = -2x + 4$ принимают положительные значения при $x \in (-3; 2)$.

Геометрическая иллюстрация полученного вывода дана на рисунке 44, где построены графики этих функций.

Из рисунка видно, что промежуток $(-3; 2)$ представляет собой множество значений x, при которых оба графика расположены выше оси x.

Приведем примеры решения систем неравенств.

Пример 1. Решим систему неравенств $\begin{cases} 5x - 12 > 17, \\ 3 - x < 0. \end{cases}$

Переходя от каждого неравенства системы к равносильному ему неравенству, получим:

$$\begin{cases} 5x > 29, \\ -x < -3; \end{cases} \qquad \begin{cases} x > 5{,}8, \\ x > 3. \end{cases}$$

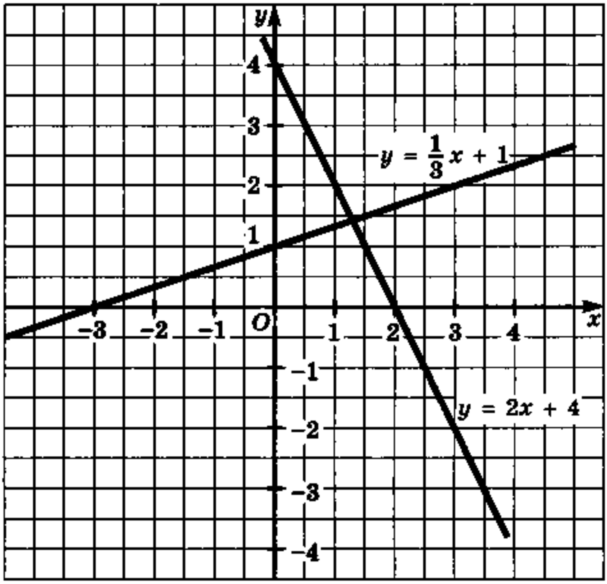


Рис. 44

Решениями системы служат значения x, большие 5,8 (большего из чисел 5,8 и 3), т. е. удовлетворяющие условию $x > 5{,}8$. Значит, множеством решений системы является числовой промежуток $(5{,}8; +\infty)$. Геометрическая иллюстрация этого вывода дана на рисунке 45.

Ответ можно записать в виде числового промежутка $(5{,}8; +\infty)$ или в виде неравенства $x > 5{,}8$, которое задает этот промежуток.

Пример 2. Решим систему неравенств

$$\begin{cases} \frac{1}{3}x - 2 < 4, \\ -0{,}2x > -1. \end{cases}$$

Имеем:

$$\begin{cases} \frac{1}{3}x < 6, \\ x < 5; \end{cases} \qquad \begin{cases} x < 18, \\ x < 5. \end{cases}$$

Рис. 45

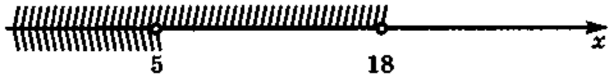


Рис. 46

Решениями системы являются значения x, меньшие 5 (меньшего из чисел 18 и 5), т. е. удовлетворяющие условию $x < 5$. Значит, множеством решений системы является числовой промежуток $(-\infty; 5)$. Этот вывод наглядно проиллюстрирован с помощью координатной прямой на рисунке 46.

Пример 3. Решим систему неравенств

$$\begin{cases} 0{,}2x - 0{,}6 > 1, \\ 2 - 1{,}5x > 5. \end{cases}$$

Имеем:

$$\begin{cases} 0{,}2x > 1{,}6, \\ -1{,}5x > 3; \end{cases} \qquad \begin{cases} x > 8, \\ x < -2. \end{cases}$$

Система не имеет решений, так как не существует значений x, удовлетворяющих обоим условиям: $x > 8$ и $x < -2$. Значит, множеством решений системы является пустое множество. Наглядная иллюстрация этого вывода дана на рисунке 47.

Пример 4. Решим двойное неравенство

$$-5 < 6 - 2x < 7.$$

Двойное неравенство представляет собой другую запись системы неравенств:

$$\begin{cases} 6 - 2x < 7, \\ 6 - 2x > -5. \end{cases}$$

Решая ее, найдем, что

$$\begin{cases} x > -0{,}5 \\ x < 5{,}5, \end{cases}$$

т. е.

$$-0{,}5 < x < 5{,}5.$$

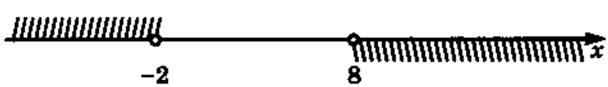


Рис. 47

Запись решения удобно вести в виде цепочки двойных неравенств:

$$-5 < 6 - 2x < 7,$$
$$-11 < -2x < 1,$$
$$11 > 2x > -1,$$
$$5{,}5 > x > -0{,}5.$$

Множеством решений заданного двойного неравенства является числовой промежуток $(-0{,}5;\ 5{,}5)$.

1007. Является ли решением системы неравенств

$$\begin{cases} 3-2x<1, \\ 6+4x<19 \end{cases}$$

число:

а) -1; б) 0; в) 2; г) $3{,}5$; д) $6{,}25$?

1008. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} x > 3\frac{1}{3}, \\ x > 3{,}2; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 0{,}2x > 0, \\ 6x \leqslant 1; \end{cases}$ д) $\begin{cases} 0x > -5, \\ x > 6; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x < -1{,}4, \\ x < -1{,}5; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 0{,}3x \geqslant 5, \\ 0{,}1x \leqslant 1; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 6x < 12, \\ 0x < -3. \end{cases}$

1009. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} 6 - 11x > x, \\ 0{,}7x < x; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2 - 3x \geqslant 4x, \\ 3x < 0{,}2x; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3-4x \leqslant 0, \\ \frac{1}{9}x \leqslant 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 6x - 1 < 0, \\ \frac{1}{7}x \geqslant -1. \end{cases}$

1010. При каких значениях x обе функции $y = -0{,}2x + 1$ и $y = \sqrt{0{,}3x + 4}$ принимают отрицательные значения?

1011. Найдите область определения функции:

а) $f(x) = \sqrt{3x - 4{,}2} + \sqrt{3{,}2 - 2x}$;

б) $f(x) = \sqrt{0{,}4x - 1} + \sqrt{0{,}6x + 4}$;

в) $g(x) = \dfrac{\sqrt{3x - 1} + \sqrt{x}}{x - 1}$;

г) $g(x) = \dfrac{\sqrt{x-2}+\sqrt{5-x}}{x-4}$;

д) $h(x) = \dfrac{x}{\sqrt{0,4-6x}-\sqrt{3x-0,1}}$;

е) $h(x) = \dfrac{\sqrt{1,7x+1}-\sqrt{0,4x+3}}{\sqrt{x}}$.

1012. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} 5-2x>3-x, \\ 6+4x<8+x; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 14-3x<1-x, \\ 1+7x>2+6x; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 6(2-x)-3(4x+1)>0, \\ 1-2(6x-1)>3; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 1,2(x-5)-0,2(3+x)>8, \\ 2,5(4x-2)-x>4; \end{cases}$

д) $\begin{cases} 0,3x+1<0,4x-2, \\ 1,5x-3>1,3x-1; \end{cases}$

е) $\begin{cases} 1,9x-0,4>1,7x-0,1, \\ 6,8x+2,3<2+6,5x; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} 15(x-2)-x(1-x)>x^2, \\ 6-2x>0; \end{cases}$

з) $\begin{cases} (x-4)(x+6)<x^2-2, \\ 16-x<x. \end{cases}$

1013. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} 9(x+3)<5(x+1)+6(x+2), \\ 2(x-18)<7x-3(2x+3); \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3(x+1)>2(3-x)+4x, \\ 6(x-1)+2(3-x)>x; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 12(2-x)+x(4+x)<x^2, \\ (6x+7)(7-6x)>-(6x-1)^2; \end{cases}$

г) $\begin{cases} (2x-1)(x+2)>2x^2, \\ (0,2x-3)^2<(0,1x+6)(0,4x-1); \end{cases}$

д) $\begin{cases} (2x-1)^3-4x^2(2x-3)<x+2,5, \\ 0,2(x-18)<0,7x-0,3(2x+3); \end{cases}$

е) $\begin{cases} (x+6)^3-x^2(x+18)>6+(x+1), \\ 0,6(x-1)>0,5x(3+x). \end{cases}$

1014. Решите систему неравенств и укажите все целые числа, которые являются ее решениями:

а) $\begin{cases} 0,5(2-x)>0,2, \\ -3x\leqslant 9; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 0,7(x-1)<0,9, \\ -0,2(x-4)\leqslant 1,2; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 0,8-3x<1, \\ -2(x-3)\geqslant 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 16(1-0,25x)<x, \\ 5(1+0,6x)<21. \end{cases}$

1015. Найдите целые решения системы неравенств:

а) $\begin{cases} 10,9-2x<0, \\ 12x-90<x; \end{cases}$ в) $\begin{cases} (x+3)^3>x^2(x+9), \\ 37-12x>0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 1-3x<3, \\ 6-2x\geqslant 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} (4-x)^3-x^2(12-x)<0, \\ 7-3x>0. \end{cases}$

1016. Замените a каким-либо числом так, чтобы множество целых чисел, удовлетворяющих системе $\begin{cases} 3x>41,7, \\ 2x-a<0, \end{cases}$

а) состояло из пяти чисел;

б) было пустым множеством.

1017. При каких значениях a не имеет решений система неравенств:

а) $\begin{cases} 0,3x-4,5<0, \\ x-a>0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 0,5(x-2)\geqslant 0,4, \\ 2x-a\leqslant 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 0,5x-1,5<0, \\ 3x-a>0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 0,2x-4>0,5x-8, \\ 6x-1>a+2? \end{cases}$

1018. При каких значениях b имеет решения система неравенств:

а) $\begin{cases} 0,5(x-2)\geqslant 0,4, \\ 2x-b\leqslant 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 12+3x\leqslant 6+2,5x, \\ 4x+2,3\geqslant b-1,7? \end{cases}$

1019. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} \dfrac{x}{2}-\dfrac{x}{3}<1, \\ \dfrac{10-x}{2}>0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} \dfrac{x-4}{6}<\dfrac{2x}{3}, \\ x-\dfrac{x-1}{4}<0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \dfrac{y}{10}+\dfrac{2y}{5}<1, \\ \dfrac{3y}{4}-1>y; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2y-\dfrac{y+4}{4}<2, \\ \dfrac{3-y}{2}-y<3y. \end{cases}$

1020. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} \dfrac{0{,}2x+2}{3}-\dfrac{0{,}3x-1}{2}<1, \\ \dfrac{6-5x}{2}>1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \dfrac{0{,}3x+1}{2}-x\leqslant 3{,}9, \\ \dfrac{x-4}{6}-1\geqslant \dfrac{x}{15}; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \dfrac{0{,}2x-1}{3}-\dfrac{0{,}1x}{4}>2, \\ 3-\dfrac{x}{4}<1; \end{cases}$

г) $\begin{cases} \dfrac{1{,}3-x}{2}-\dfrac{0{,}5x}{4}\leqslant x, \\ 1-\dfrac{x}{3}\leqslant\dfrac{x}{4}. \end{cases}$

1021. Найдите наибольшее целое число (если оно существует), удовлетворяющее системе неравенств:

а) $\begin{cases} 8(3-x)-2x>0, \\ \dfrac{x}{4}-\dfrac{x}{2}<1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} -x<2, \\ \dfrac{x-3}{4}-x>0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \dfrac{x}{4}-1>x, \\ \dfrac{3-x}{2}>0; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 5-\dfrac{x}{4}>0, \\ \dfrac{3x-4}{4}>-1. \end{cases}$

1022. Найдите наименьшее целое число, удовлетворяющее системе неравенств:

а) $\begin{cases} \dfrac{5+x}{3}-2x<0, \\ \dfrac{x}{4}-\dfrac{2}{3}(x-5)>\dfrac{x-8}{6}-x; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \dfrac{x-3}{4}-x<\dfrac{1}{3}(1-x), \\ 2x-5>\dfrac{x+1}{6}+\dfrac{1}{3}x; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \dfrac{x-8}{4}-\dfrac{1}{3}(x-1)<0, \\ \dfrac{3-x}{2}-0{,}2x>\dfrac{8-3x}{4}; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x-\dfrac{x+6}{5}-\dfrac{x-1}{4}>\dfrac{3x-2}{20}, \\ 2x>3-\dfrac{x-8}{4}. \end{cases}$

1023. При каких значениях a решение системы уравнений

$$\begin{cases} 3x+y=a-4, \\ x-y=a-1 \end{cases}$$

удовлетворяет условию: $x<0$, $y>0$?

1024. При каких значениях b решение системы уравнений

$$\begin{cases} x-2y=2b+1, \\ 6y-x=8b+3 \end{cases}$$

удовлетворяет условию: $x > 0$, $y < 0$?

1025. При каких значениях a прямые

$$y = 0{,}8x + 2(a - 4) \text{ и } y = 1{,}6x + 5(a - 1)$$

пересекаются в точке, расположенной:

а) в первой координатной четверти;

б) во второй координатной четверти?

1026. Решите двойное неравенство:

а) $11 < 5x + 1 < 16$;
в) $-1 \leqslant \frac{1}{3}x - 2 \leqslant 0$;

б) $0 < 2 - x < 3$;
г) $4{,}5 \leqslant 0{,}5 - 2x \leqslant 6{,}9$.

1027. Решите двойное неравенство:

а) $11 < 8 + 10x < 26$;
в) $-5 \leqslant 1 + 3x \leqslant -2$;

б) $-1 < \frac{16-x}{4} < 1$;
г) $-1 \leqslant \frac{8-4x}{3} \leqslant 0$.

1028. Решите двойное неравенство и укажите все целые числа, которые являются его решениями:

а) $1{,}5 < \frac{2+x}{2} < 2{,}5$;
в) $0 < \frac{3x-2}{3} < 1$;

б) $-1 < \frac{2-x}{3} < 0{,}5$;
г) $1 < \frac{4-2x}{3} < 2$.

1029. а) При каких b значение двучлена $2b + 2$ принадлежит промежутку $[-6; 6]$;

б) при каких y значения дроби $\frac{3+2y}{5}$ принадлежат промежутку $(-4; 2)$?

1030. Найдите все целые числа, удовлетворяющие системе:

а) $\begin{cases} -1 < \frac{1}{3}x - 2 < 1, \\ 8(0{,}5x-1) > 6x - 22; \end{cases}$
в) $\begin{cases} -3 < \frac{x-8}{5} < 1, \\ 4(x-3{,}6) > 3(x-2); \end{cases}$

б) $\begin{cases} 0 < \frac{1}{7}x - \frac{1}{3} < 1, \\ 6(2-0{,}5x) < x; \end{cases}$
г) $\begin{cases} -3{,}5 < \frac{3x-1}{2} < 2{,}5, \\ 3(3{,}5-x) > 2x+5. \end{cases}$

1031. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} x>28, \\ x>32, \\ x>11; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y<-4, \\ y<12, \\ y<0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} a>1, \\ a>5, \\ a<9; \end{cases}$ г) $\begin{cases} b<-2, \\ b<-4, \\ b>0. \end{cases}$

1032. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} -x<2, \\ 4x<0{,}8, \\ 5x>-1{,}5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2-x>0{,}5, \\ 6-x>6, \\ 2x+3>1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 3x-8>x-4, \\ 3-2x>4-x, \\ 5-x>1-3x. \end{cases}$

1033. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} 6-2x>4{,}5(2x-1)+2, \\ \frac{2}{3}(x+6)>2x, \\ \frac{x-0{,}4}{2}>0{,}5; \end{cases}$ в) $\begin{cases} (6x-1)(x+2)-6x^2<0, \\ \frac{1}{3}(x-1)<\frac{x}{12}, \\ 5(x-2)>2(3x-4); \end{cases}$

б) $\begin{cases} 15-6(3x-1)>0{,}5(4x-2), \\ \frac{1}{3}(2x+1)<x, \\ \frac{2x+1}{7}-\frac{3x-1}{14}>0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \frac{x+4}{3}>\frac{x-1}{4}-\frac{x}{2}, \\ 3x>1-0{,}5(1-4x), \\ 1{,}5(x-2)>x-1. \end{cases}$

1034. При каких значениях a не имеет решений система неравенств:

а) $\begin{cases} 3x-1<0, \\ 0{,}2x+1>0, \\ 3x+4<3a; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2(x-1)-3x<0, \\ 6(2-x)-x>3x, \\ 4x-5<3(a-1); \end{cases}$

б) $\begin{cases} 5x+7>0, \\ 3>2x-4, \\ 5(x+3)<2a; \end{cases}$ г) $\begin{cases} -0{,}6(2-x)+x<-2, \\ 0{,}1x-0{,}2(2-x)<0{,}2, \\ 5(x+1)>a+3? \end{cases}$

1035. Если к некоторому натуральному числу прибавить его половину, то сумма будет больше 29, а если из этого числа вычесть его треть, то разность будет меньше 14. Найдите это натуральное число.

1036. Представьте число 75 в виде суммы двух натуральных чисел так, чтобы половина первого была меньше 29, а второе было бы меньше $\frac{1}{3}$ первого.

1037. Длина основания равнобедренного треугольника равна 36 см, а его периметр меньше 80 см. Какую длину может иметь боковая сторона треугольника?

1038. Длина боковой стороны равнобедренного треугольника равна 18 см, а его периметр больше 65 см. Какую длину может иметь основание треугольника?

1039. Из пунктов A и B, расстояние между которыми 384 км, выехали одновременно навстречу друг другу пассажирский и товарный поезда, причем скорость товарного была на 20 км/ч меньше скорости пассажирского. Через 3 ч поезда еще не встретились, а через 4 ч оказалось, что встреча уже произошла и оба поезда, миновав место встречи, продолжают движение. Какой может быть скорость товарного поезда?

Упражнения для повторения

1040. Докажите, что:

а) $\frac{2-x}{2} - 1 < 0$ при $x > 0$;

б) $\frac{a-2}{2} - \frac{a-1}{3} > 0$ при $a > 4$.

1041. Функция задана формулой $y = 0{,}7x - 1$. Найдите значение y при x, равном $-1{,}5$; 0; 1,5. При каком x значение y равно 0; 2; 1000?

1042. Какие остатки могут получиться при делении квадрата натурального числа на 9?

42. Решение неравенств, содержащих переменную под знаком модуля

Рассмотрим приемы решения простейших неравенств с переменной под знаком модуля.

Простейшие неравенства вида $|x - a| < b$ или $|x - a| > b$, где a и b — некоторые числа, причем $b > 0$, можно решать, используя геометрические представления. Как известно, расстояние

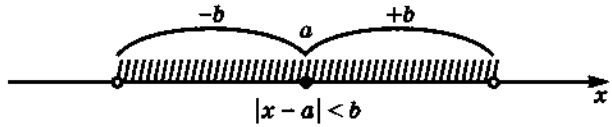


Рис. 48

между точками координатной прямой равно модулю разности координат этих точек. Поэтому задачу решить неравенство $|x - a| < b$ можно сформулировать иначе: найти координаты точек координатной прямой, расстояние от которых до точки с координатой a меньше b (рис. 48).

Пример 1. Решим неравенство $|x - 1| < 5$.

На координатной прямой от точки с координатой 1 на 5 единиц удалены точки с координатами -4 и 6, а менее чем на 5 единиц – точки, заключенные между ними (рис. 49).

Следовательно, искомое множество есть интервал $(-4; 6)$.

Пример 2. Решим неравенство $|x + 1| \geqslant 3$.

Запишем неравенство в виде $|x - (-1)| \geqslant 3$ и вновь воспользуемся геометрическим смыслом модуля. На координатной прямой от точки -1 на 3 единицы удалены точки -4 и 2 (рис. 50).

Точки координатной прямой, удаленные от точки -1 на расстояние, не меньше чем на 3 единицы, лежат на одном из числовых лучей: либо на числовом луче $(-\infty; -4]$, либо на луче $[2; +\infty)$, а решением неравенства служит объединение этих числовых промежутков: $(-\infty; -4] \cup [2; +\infty)$.

Основной прием решения неравенств с переменной под знаком модуля состоит в том, чтобы, используя определение и свойства модуля, освободиться от знака модуля, заменяя неравенство равносильным ему неравенством, системой неравенств или совокупностью неравенств.

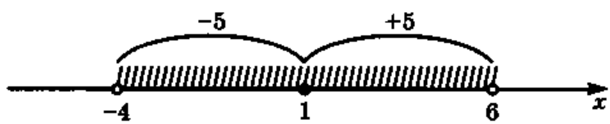


Рис. 49

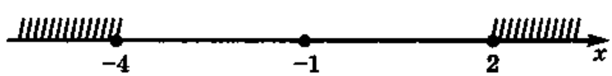


Рис. 50

Рассмотрим неравенства вида $|f(x)| < b$ или $|f(x)| > b$, где b — некоторое число.

Если $b < 0$, то неравенство $|f(x)| < b$ не имеет решений, а неравенство $|f(x)| > b$ верно при любом значении x, т. е. его решением является числовая прямая $(-\infty; +\infty)$.

Если $b > 0$, то неравенство $|f(x)| < b$ равносильно системе $\begin{cases} f(x) < b, \\ f(x) > -b, \end{cases}$ т. е. двойному неравенству $-b < f(x) < b$, а неравенство $|f(x)| > b$ равносильно совокупности неравенств $f(x) < -b$ и $f(x) > b$.

Это обусловлено тем, что при $b > 0$ модуль, меньше, чем b, имеют числа, принадлежащие интервалу $(-b; b)$, а модуль, больше чем b, имеют числа, находящиеся вне этого промежутка.

И, наконец, если $b = 0$, то неравенство $|f(x)| < b$ не имеет решений, а неравенство $|f(x)| > b$ верно для любых значений x, для которых $f(x) \neq 0$.

Пример 3. Решим неравенство $|x^2 - 5x| > 6$.

Данное неравенство равносильно совокупности двух неравенств $x^2 - 5x < -6$ и $x^2 - 5x > 6$. Решением первого неравенства является интервал $(2; 3)$, решением второго — объединение двух открытых числовых лучей $(-\infty; -1)$ и $(6; +\infty)$, а решением исходного неравенства — объединение всех трех промежутков: $(-\infty; -1) \cup (2; 3) \cup (6; +\infty)$.

Заметим, что при решении неравенств, содержащих переменную под знаком модуля, иногда бывает полезным воспользоваться некоторыми свойствами модуля. Например, для любого действительного значения переменной a справедливо равенство $|a| = |-a|$, поскольку расстояние от точки с координатой a на координатной прямой до начала координат равно расстоянию от точки с координатой $-a$ до начала отсчета (эти точки симметричны относительно начала координат и, следовательно, равноудалены от центра симметрии). Из этого свойства следует, что $|x - a| = |a - x|$.

1043. Найдите, при каких значениях x расстояние между точками $A(x)$ и $B(8)$:

а) меньше 4; в) не меньше 1;
б) больше 3; г) не больше 5.

1044. Используя геометрический смысл модуля, решите неравенство:

а) $|x-7|<4$; г) $|32-x|\geqslant 1$;
б) $|x+5|>6$; д) $|x+17|<-2$;
в) $|1-x|\leqslant 23$; е) $|17-x|>-1$.

1045. Найдите множество значений a, при которых для любых значениях x верно неравенство:

а) $|2-x|>2a-1$; б) $|7{,}2+x|>1{,}5-3a$.

1046. При каких значениях a для любых значений x не имеет решения неравенство:

а) $|x+1|<a+3$; б) $|23-x|<1{,}5-5a$?

1047. Решите неравенство:

а) $|3x-2|\geqslant 3{,}4$; в) $|22-3x|<8$;
б) $|12x-1|>17$; г) $|16-7x|\leqslant 2$.

1048. Решите двойное неравенство:

а) $1<|3x-8|<5$; в) $1\leqslant|2x-11|\leqslant 5$;
б) $2<|7-5x|<12$; г) $3\leqslant|15-2x|\leqslant 7$.

1049. При каких значениях a всякое решение двойного неравенства $3<|x-2|<4$ является решением неравенства $x+2a<0$?

1050. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases}|x-3|\leqslant 2,\\|3-2x|\leqslant 1;\end{cases}$ в) $\begin{cases}|x+4|>2,\\|3{,}5-2x|<0{,}5;\end{cases}$

б) $\begin{cases}|2x-5|<5,\\|5x+1|<21;\end{cases}$ г) $\begin{cases}|3x-1|\leqslant 7,\\|7-x|\leqslant 2.\end{cases}$

1051. Решите неравенство:

а) $|x^2+1|>2$; в) $|x^2-2x|<6$;
б) $|x^2-2x|<3$; г) $|x^2+x-1|>1$.

1052. Найдите все целые решения неравенства:

а) $|x^2-3|<6$; в) $|x^2+4x|<5$;
б) $|x^2-8|<7$; г) $|x^2-x|<6$.

1053. Решите неравенство, воспользовавшись введением новой переменной:

а) $x^2+|x|-6<0$; б) $x^2-2|x|-8>0$.

Упражнения для повторения

1054. Из пункта A в пункт B, находящийся на расстоянии 110 км от пункта A, выехал автомобиль. Через 0,2 ч после этого вслед за ним выехал мотоциклист, который, догнав автомобиль, немедленно повернул обратно. Двигаясь в обратном направлении с той же скоростью, мотоциклист возвратился в пункт A в тот момент, когда автомобиль прибыл в пункт B. Найдите скорость автомобиля, если скорость мотоцикла была равна 60 км/ч?

1055. Какая из двух дробей ближе расположена к единице: правильная $\frac{a}{b}$ или неправильная $\frac{b}{a}$, где $0 < a < b$?

1056. При каком значении параметра a уравнение $ax^2 - (a + 1)x + 2a - 1 = 0$ имеет только один корень?

Контрольные вопросы и задания

1. Что называется решением неравенства с одной переменной? Является ли решением неравенства $2x - 3 > 4$ число 5; число 3? Что значит решить неравенство?

2. Какое неравенство называется линейным неравенством с одной переменной? Решите неравенство: $3x > 4$; $-2x > 6$; $0 \cdot x > -2$; $0 \cdot x < -5$.

3. Какие неравенства называются равносильными? Сформулируйте условия перехода от данного неравенства с одной переменной к равносильному неравенству. Приведите примеры равносильных неравенств.

4. Что называется решением системы неравенств с одной переменной? Что значит решить систему неравенств с одной переменной? На примере системы неравенств

$$\begin{cases} -0{,}8x < -2{,}4, \\ 3x - 4 < 12 \end{cases}$$

разъясните, как решают систему двух неравенств с одной переменной.

5. Объясните, как решаются неравенства вида $|f(x)| < b$ и $|f(x)| > b$, где b — положительное число.

Дополнительные упражнения к главе 5

К параграфу 12

1057. Сравните значения выражений:

а) $\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ и $1+\sqrt{6}$; б) $\dfrac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}$ и $1+\sqrt{30}$.

1058. Сравните значения выражений:

а) $\sqrt{5}+\sqrt{15}$ и $\sqrt{20}$; в) $\sqrt{2}+\sqrt{7}$ и $\sqrt{11}$;

б) $\sqrt{5}+\sqrt{3}$ и $\sqrt{6}+\sqrt{2}$; г) $\sqrt{3}+\sqrt{10}$ и $\sqrt{15}$.

1059. Докажите неравенство:

а) $3\sqrt{3}+2\sqrt{2}<\sqrt{6}+6$;

б) $4\sqrt{3}+1>2\sqrt{6}+\sqrt{2}$;

в) $\sqrt{6}+2<\sqrt{3}+2\sqrt{2}$;

г) $4+2\sqrt{10}<\sqrt{5}+8\sqrt{2}$.

1060. Сравните значения выражений:

а) $\sqrt{8+\sqrt{2+\sqrt{3}}}$ и $1+\sqrt{7}$; б) $\sqrt{6-\sqrt{1+\sqrt{7}}}$ и $\sqrt{5}-1$.

1061. Докажите, что при любом $a>0$ является отрицательным числом значение выражения:

$$\left(\frac{a-1}{a+1}-\frac{a+1}{a-1}\right):\left(\frac{a^2+1}{a^2-1}-\frac{a^2-1}{a^2+1}\right).$$

1062. Докажите, что при любом $a>1$ является положительным числом значение выражения:

$$\frac{a^2+4a+4}{a-3}\cdot\left(\frac{1}{a-1}+\frac{3}{a-a^2}\right).$$

1063. Докажите, что если $0<a<1$ и $0<b<1$, то

$$0<\frac{a+b}{1+ab}<1.$$

1064. Докажите неравенство:

а) $6x(x+8)-(5x-27)(x+17)>0$;

б) $(4x-1)(4x+1)-16(x-8)>0$;

в) $x^3-6x+18>x(x-2)(x+1)$;

г) $x^2(x-4)-x(x+6)(x-6)>-68$.

1065. Докажите неравенство, используя выделение квадрата двучлена:

а) $x^2 - x + 3 > 0$;
б) $a^2 + ab + b^2 \geqslant 0$;
в) $a^2 - ab + b^2 \geqslant 0$;
г) $y^2 - 0{,}6y + 0{,}11 > 0$.

1066. Докажите, что из всех прямоугольников, периметр которых равен 80 см, наименьшую площадь имеет квадрат.

1067. Моторная лодка прошла в первый день некоторое расстояние по реке и вернулась обратно. Во второй день она прошла такое же расстояние по другой реке и вернулась обратно. Скорость течения первой реки v_1 км/ч, а второй — v_2 км/ч, причем $v_1 < v_2$. В какой из дней лодка затратила на весь путь больше времени?

1068. Два пешехода отправились одновременно из пункта A в пункт B. Один из них шел с постоянной скоростью, другой половину пути шел со скоростью на 0,5 км/ч большей, а вторую половину — со скоростью, на 0,5 км/ч меньшей скорости первого. Кто из них раньше пришел в пункт B?

1069. Докажите неравенство:

а) $a^2 + b^2 \geqslant 2(a + b) - 2$;

б) $a^2b^2 - ab \geqslant -\dfrac{1}{4}$;

в) $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 2a(b + c) - a^2$;

г) $\dfrac{(a+b)^2}{8} \geqslant \dfrac{a+b}{2} - \dfrac{1}{2}$;

д) $a^2 - 4a + 12 > 4b - b^2$.

1070. Докажите, что при положительных значениях переменных верно неравенство:

а) $\dfrac{a^4 + 6a^2b^2 + b^4}{a^2 + b^2} \geqslant 4ab$;

б) $\dfrac{ab(a + b) + ac(a + c) + bc(b + c)}{abc} \geqslant 6$.

1071. Докажите, что при $a > 0$ и $b > 0$ верно неравенство:

а) $\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}\right)\sqrt{ab} \geqslant 2$;

б) $\sqrt{\dfrac{a+b}{2}} \geqslant \dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}$;

в) $a\sqrt{b} + b\sqrt{a} \leqslant a\sqrt{a} + b\sqrt{b}$.

1072. Докажите неравенство:

а) $(a+1)(b+1)(c+1) \geqslant 8\sqrt{abc}$ при $a>0$, $b>0$, $c>0$;

б) $(a+1)(b+1)(a+c)(c+b) \geqslant 16\,abc$ при $a>0$, $b>0$, $c>0$.

1073. Докажите, что если $a+b+c=1$, $a>0$, $b>0$, $c>0$, то

$$\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1}<5.$$

К параграфу 13

1074. Решите неравенство:

а) $-\frac{x}{2} < 3(2-x) - \frac{3+x}{4}$;

б) $-3(x+8) - 2\left(\frac{x}{3} - 1\right) < 0$;

в) $-(2x+1)^3 + 8x^2(x+1{,}5) < 0{,}5x - 2$;

г) $-\left(\frac{x}{4} + \frac{x}{3}\right) > \frac{x+6}{12} - 1$;

д) $-\frac{x+0{,}4}{4} > \frac{0{,}3x}{2} - 0{,}6$;

е) $-\frac{(0{,}2x-3)^2}{4} - \frac{(0{,}1x+1)(0{,}2x-1)}{2} < x$.

1075. Найдите наибольшее целое число, при котором верно неравенство:

а) $2x + 1 - \frac{1}{6}(3x-5) < 0$;

б) $\frac{1}{2}(3x-1) + \frac{x}{5} < x + 0{,}1$;

в) $5 - \frac{3-2x}{12} > x - \frac{x}{4}$;

г) $-\frac{x-8}{6} > \frac{2x-1}{4} - 0{,}5x$.

1076. Найдите наименьшее целое число, при котором верно неравенство:

а) $12 - \frac{1}{3}\left(15 - \frac{x}{4}\right) < x$;

б) $\frac{5}{6}x - \frac{x-4}{4} > 0$;

в) $20 < \frac{2}{3}(6x - 2) - \frac{1}{2}(2 + x)$;

г) $8 - \left(\frac{x-1}{4} + \frac{x}{3}\right) < x$.

1077. Решите относительно x уравнение

$$3x + 2a = 8(x - 5) + 5a$$

и найдите, при каких значениях a корнем уравнения является:

а) положительное число;

б) отрицательное число.

1078. Найдите множество решений неравенства:

а) $2 \cdot \frac{1{,}5x + 7}{5} \leqslant 2x - \frac{6x - 18}{15}$, принадлежащих промежутку $[-1{,}5;\ 1{,}5]$;

б) $3 \cdot \frac{0{,}5x - 1}{4} - \frac{x}{8} \leqslant 0{,}3x$, принадлежащих промежутку $[-18;\ 0]$.

1079. Найдите множество положительных решений системы неравенств:

а) $\begin{cases} 3(2x-1) - 2(x+1) < 3x, \\ x^2 - (x+6)(x-1) < 8; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 6x(x-2) - (2x-4)(3x-1) < x, \\ x - \frac{x-2}{4} > 3x. \end{cases}$

1080. Найдите множество отрицательных решений системы неравенств:

а) $\begin{cases} \frac{x-0{,}2}{2} - \frac{x+0{,}4}{4} - 1 < 0, \\ (x-4)(4+x) - 11x < x^2 + 5x; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 12x^2\ (3x+4)(4x-1) < 8, \\ \frac{x-2}{4} - x < 3(2-x). \end{cases}$

1081. Найдите множество значений x, при которых:

а) значение двучлена $0{,}5x - 5$ принадлежит промежутку $[-3; 3]$;

б) значение двучлена $2 - 0{,}1x$ находится вне промежутка $[-4; 4]$.

1082. При каких значениях x значения функции $y = 0{,}5x - 1{,}5$:

а) принадлежат промежутку $[-2{,}5; 1{,}5]$,

б) находятся вне промежутка $[-1{,}5; 3{,}5]$?

1083. Из числового промежутка $(-1; 4)$ выделите подмножество значений x, при которых двучлен $0{,}2 + 0{,}3x$ принимает большее значение, чем двучлен $1{,}2 - 0{,}1x$.

1084. Из числового промежутка $[-2; 5]$ выделите подмножество значений x, при которых дробь $\frac{0{,}2x^2+x-1}{6}$ принимает меньшее значение, чем дробь $\frac{0{,}4x^2-3}{12}$.

1085. Решите систему:

а) $\begin{cases} 0 < 3 + 2x < 1, \\ 6x + 11 < 8; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 0 < 1 - x < 3, \\ 3 - 2x > 4x. \end{cases}$

1086. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} 0{,}3(x+2) - \frac{1}{3}x < 0{,}8, \\ (x-0{,}1)(x+1{,}3) - x^2 > 2{,}27, \\ |3x-7| < 11; \end{cases}$

б) $\begin{cases} (3x+1)(2x+6) - 6x^2 < x + 4, \\ 5(2x-0{,}1) - 9x < 0, \\ |0{,}6-2x| < 0{,}4. \end{cases}$

1087. Решите двойное неравенство:

а) $3 < |x| < 4$; в) $1 \leqslant |1 - 2x| \leqslant 3$;

б) $2 < |x - 1| < 3$; г) $2 \leqslant |2 - 3x| \leqslant 5$.

1088. Найдите все целые числа, удовлетворяющие двойному неравенству $1{,}5 < |2x - 1| < 5{,}2$.

1089. При каких значениях a не имеет решений система неравенств:

а) $\begin{cases} 5(2x-a)<4x+5, \\ 3+4x>x+2a; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2(x-a)<x-8, \\ 3(x-2a)>x-4? \end{cases}$

1090. Укажите какие-либо значения a и b, при которых множеством решений системы $\begin{cases} 5x-b\geqslant 4, \\ ax-2\leqslant b \end{cases}$ является:

а) пустое множество;
б) числовой промежуток $[2;\ 4]$;
в) числовой промежуток $[3;\ +\infty)$.

1091. При каком значении a решением системы уравнений $\begin{cases} 2x+y=a-1, \\ 3x-y=a \end{cases}$ является пара положительных значений x и y?

1092. При каких значениях a решением системы уравнений $\begin{cases} x-2y=8a, \\ 3x+y=a+6 \end{cases}$ является пара отрицательных значений x и y?

1093. При каких значениях a не имеет решений система неравенств:

а) $\begin{cases} \dfrac{3x}{4}-\dfrac{2-x}{2}>1, \\ \dfrac{1}{3}(x-4)<2x-1, \\ 0{,}5(x-4)>x+a; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{6x-2}{3}<2-\dfrac{1+2x}{3}, \\ 0{,}2(x-1)>x-\dfrac{1}{3}, \\ 6(2x-1)>3x+a? \end{cases}$

1094. При каких значениях a имеет смысл выражение:

а) $\sqrt{\dfrac{1{,}2a+6}{a}}$; б) $\dfrac{\sqrt{-3-2a}}{a+4}$?

1095. Укажите множество допустимых значений x в выражении:

а) $\sqrt{1-|2x-3|}$; в) $\sqrt{15-|3x-6|}$;

б) $\dfrac{\sqrt{4-|3x-4|}}{x}$; г) $\dfrac{\sqrt{2-|1-5x|}}{x-1}$.

1096. Если из половины некоторого натурального числа вычесть его треть, то разность будет меньше 6, а если к $\frac{2}{3}$ этого числа прибавить $\frac{1}{5}$ его часть, то сумма будет больше 26. Найдите это натуральное число.

1097. Из пункта A вышел пешеход. Одновременно вслед ему из пункта B, удаленного от A на 45 км, выехал велосипедист, скорость которого в 3,5 раза больше скорости пешехода. Через 3 ч велосипедист еще не догнал пешехода, а через 4 ч оказалось, что он уже перегнал пешехода. Какой могла быть скорость пешехода?

1098. Решите неравенство:

а) $|x - 2| < 2$;　　в) $\frac{1}{|x + 3|} < \frac{1}{2}$;

б) $|2 - x| \geqslant 1$;　　г) $\frac{1}{|1 - x|} \geqslant 0{,}2$.

1099. Найдите все целые числа, удовлетворяющие двойному неравенству $1{,}5 < |2x - 1| < 5{,}2$.

ГЛАВА 6 СТЕПЕНЬ С ЦЕЛЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

§ 14. СТЕПЕНЬ С ЦЕЛЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ И ЕЕ СВОЙСТВА

43. Определение степени с целым отрицательным показателем

До сих пор мы изучали лишь степени с целым неотрицательным показателем. В дальнейшем будем рассматривать и степени, в которых показатель может быть целым отрицательным числом, т. е. расширим понятие степени, рассматривая степени с любым целым показателем.

Вам известно, какой смысл имеет выражение a^n, когда n — натуральное число или нуль:

если n — натуральное число, большее 1, и a — любое число, то

$$a^n = \underbrace{aa \dots a}_{n \text{ раз}};$$

если $n = 1$ и a — любое число, то

$$a^n = a, \text{ т. е. } a^1 = a;$$

если $n = 0$ и $a \neq 0$, то

$$a^n = 1, \text{ т. е. } a^0 = 1.$$

Вам известны также свойства степени с целым неотрицательным показателем:

$$a^m a^n = a^{m+n}, \tag{1}$$

$$a^m : a^n = a^{m-n}, \text{ где } a \neq 0 \text{ и } m \geqslant n, \tag{2}$$

$$(a^m)^n = a^{mn}, \tag{3}$$

$$(ab)^n = a^n b^n. \tag{4}$$

На эти свойства для нулевого показателя накладывается ограничение на основание степени a, т. е. $a \neq 0$.

Кроме того, при изучении дробей было доказано свойство:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, \tag{5}$$

где a и b — любые числа, причем $b \neq 0$, $n \in N$.

Введем теперь понятие степени с целым отрицательным показателем. При этом новое определение должно быть таким, чтобы свойства степени с натуральным и нулевым показателем сохранили силу и для степеней с целым отрицательным показателем.

Рассмотрим выражение $2^3 : 2^7$.

К этому частному мы не можем применить правило деления степеней с одинаковыми основаниями, так как это правило согласно свойству $a^m : a^n = a^{m-n}$ имеет место, когда $m \geqslant n$.

Если это правило распространить на случай, когда $m < n$, то, применив его к частному $2^3 : 2^7$, получим выражение $2^3 : 2^7 = 2^{3-7} = 2^{-4}$, не имеющее смысла, так как степень определена пока только для натурального и нулевого показателя.

С другой стороны, если частное $2^3 : 2^7$ преобразовать обычным известным нам способом:

$$2^3 : 2^7 = \frac{2^3}{2^7} = \frac{2^3 : 2^3}{2^7 : 2^3} = \frac{1}{2^{7-3}} = \frac{1}{2^4},$$

то получим дробь, имеющую определенный смысл.

Сопоставляя равенства $2^3 : 2^7 = 2^{-4}$ и $2^3 : 2^7 = \frac{1}{2^4}$, приходим к выводу, что выражение 2^{-4} целесообразно считать числом, обратным степени того же основания с противоположным показателем, т. е. дробью $\frac{1}{2^4}$.

Такое определение и принимается для степеней с целыми отрицательными показателями и любыми основаниями, отличными от нуля.

Определение. **Если n — целое отрицательное число и $a \neq 0$, то $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$.**

По определению имеем:

$$10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100} = 0{,}01; \qquad (-2)^{-4} = \frac{1}{(-2)^4} = \frac{1}{16};$$

$$\left(-\frac{1}{3}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(-\frac{1}{3}\right)^3} = \frac{1}{-\frac{1}{27}} = -27; \qquad \left(\frac{2}{7}\right)^{-1} = \frac{1}{\frac{2}{7}} = \frac{7}{2}.$$

Заметим, что выражение 0^n, где n — целое отрицательное число, не имеет смысла.

1100. Представьте степень в виде дроби:

а) 3^{-2}; б) 5^{-3}; в) 7^{-1}; г) 9^{-4}; д) 27^{-2}; е) 81^{-1}.

1101. Замените дробь степенью с целым отрицательным показателем:

а) $\frac{1}{2^8}$; б) $\frac{1}{3^6}$; в) $\frac{1}{10^3}$; г) $\frac{1}{9^5}$; д) $\frac{1}{125^2}$; е) $\frac{1}{36^4}$.

1102. Представьте степень в виде дроби:

а) 13^{-3}; б) 15^{-2}; в) 25^{-3}; г) 37^{-4}.

1103. Представьте дробь в виде степени с целым показателем:

а) $\frac{1}{9^2}$; б) $\frac{1}{6^{-3}}$; в) $\frac{1}{2^{-8}}$; г) $\frac{1}{3^n}$; д) $\frac{1}{5^{-2n}}$; е) $\frac{1}{4^{2n}}$.

1104. Представьте последовательность чисел:

а) $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, 8, 16 в виде последовательности степеней с основанием 2;

б) 1000; 100; 10; 1; 0,1; 0,01; 0,001; 0,0001 в виде последовательности степеней с основанием 10.

1105. Замените числа, входящие в последовательность

5^{-4}, 5^{-3}, 5^{-2}, 5^{-1}, $5^0 \cdot 2^{-1}$, $5 \cdot 2^{-2}$, $5^2 \cdot 2^{-3}$, $5^3 \cdot 2^{-4}$,

десятичными дробями.

1106. Найдите значение выражения:

а) 7^{-2}; в) $(-2)^{-6}$; д) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-4}$; ж) $(-1)^{-10}$; и) $1{,}5^{-2}$;

б) 8^{-3}; г) $(-2)^{-5}$; е) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-3}$; з) $(-1)^{-13}$; к) $2{,}5^{-3}$.

1107. Вычислите:

а) -3^{-4}; в) $-(-5)^{-2}$; д) $2^{-1}+3^{-1}$; ж) $3^{-2}+3^{-3}$;

б) $(-2)^{-4}$; г) $-(-2)^{-5}$; е) $2^{-2}-3^{-2}$; з) $5^{-2}-4^{-2}$.

1108. Найдите значение выражения:

а) $7 \cdot 5^{-2} + 12 \cdot 10^{-2}$; в) $7 \cdot 6^{-2} - 4 \cdot \left(\frac{9}{17}\right)^{-1}$;

б) $5 \cdot 3^{-3} - 6 \cdot 9^{-3}$; г) $\left(\frac{2}{7}\right)^{-2} + \left(\frac{5}{14}\right)^{-1}$.

1109. Докажите, что при любом целом n:

а) если $a > 0$, то $a^n > 0$;

б) если $a < 0$, то $a^n > 0$ при четном n и $a^n < 0$ при нечетном n;

в) если $a \neq 0$, то a^{-n} и a^n — взаимно противоположные выражения.

1110. Верно ли неравенство $a^n > a^{-n}$, если:

а) $a > 1$ и $n \in N$; б) $0 < a < 1$ и $n \in N$?

1111. Представьте выражение в виде дроби, не содержащей степени с отрицательным показателем:

а) $2ab^{-4}$; в) $ab^{-1}c^{-1}$; д) $a(b + c)^{-1}$; ж) $\frac{a^{-2}b^{-2}}{c^2}$;

б) $3x^{-2}y^2$; г) $(-3)^{-2}x^3y^{-4}$; е) $\frac{(x+a)^{-2}}{y^{-1}}$; з) $\frac{(x^2-y^2)^{-1}}{(x+y)^{-2}}$.

1112. Используя отрицательный показатель, представьте дробь в виде произведения:

а) $\frac{x^2}{y^2}$; в) $\frac{5a}{c^6}$; д) $\frac{(a+2)^2}{(b-2)^2}$; ж) $\frac{5a^3}{(a-1)^3(a+1)^3}$;

б) $\frac{a^2}{b^4}$; г) $\frac{1}{x^5y^5}$; е) $\frac{6x}{y^2(x-y)^{-1}}$; з) $\frac{7b^2}{(b+2)^2(b-2)^2}$.

1113. Представьте в виде дроби:

а) $a^{-1} + b^{-1}$; в) $ab^{-1} + a^{-1}b$; д) $xy^{-2} + x^{-2}y$;

б) $x^{-2} - y^{-2}$; г) $cd - c^{-2}d^{-2}$; е) $a^2b^{-4} - a^{-4}b^2$.

Упражнения для повторения

1114. Найдите значение выражения:

$$\left(\frac{a}{a+b} + \frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} - \frac{a}{b-a}\right) : \frac{b}{a+5}$$

при $a = 0{,}18$, $b = 0{,}37$.

1115. Постройте в одной системе координат графики функций $y = x^2$ и $y = 1$. Найдите координаты точек пересечения этих графиков.

1116. Одна сторона прямоугольника на 6 см больше другой его стороны. Если большую сторону уменьшить в 2 раза, а меньшую увеличить на 2 см, то периметр нового прямоугольника уменьшится на 6 см. Найдите стороны данного прямоугольника.

44. Свойства степени с целым показателем

Сформулируем и докажем свойства степени с целым показателем.

Для любого $a \neq 0$ и целых m и n выполняются тождества:

$$a^m a^n = a^{m+n}, \qquad (1)$$

$$a^m : a^n = a^{m-n}, \qquad (2)$$

$$(a^m)^n = a^{mn}. \qquad (3)$$

Для любых $a \neq 0$ и $b \neq 0$ и любого целого n выполняются тождества:

$$(ab)^n = a^n b^n, \qquad (4)$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}. \qquad (5)$$

Их доказательство опирается на определение степени с целым отрицательным показателем, на свойства степени с натуральным и нулевым показателем, правила умножения и деления дробей и основное свойство дроби.

Чтобы доказать, например, свойство (1), нужно рассмотреть три случая:

1) $m \geqslant 0$ и $n \geqslant 0$; 2) $m \geqslant 0$ и $n < 0$; 3) $m < 0$ и $n < 0$.

Доказательство, соответствующее первому случаю, было дано в курсе алгебры 7-го класса.

Проведем доказательство для второго и третьего случая.

Сначала способ доказательства проиллюстрируем на частном примере.

Пусть $a \neq 0$, $m = 4$, $n = -6$. Имеем:

$$a^4 a^{-6} = a^4 \cdot \frac{1}{a^6} = \frac{a^4}{a^6} = \frac{1}{a^2} = \frac{1}{a^{6-4}} =$$

$$= a^{-(6-4)} = a^{4-6} = a^{4+(-6)}.$$

Пусть $a \neq 0$, $m = -3$, $n = -5$. Тогда:

$$a^{-3}a^{-5} = \frac{1}{a^3} \cdot \frac{1}{a^5} = \frac{1}{a^3 a^5} = \frac{1}{a^{3+5}} = a^{-(3+5)} = a^{-3+(-5)}.$$

Заметим, если $m = 0$, $n = -5$, то $a^0 a^{-5} = 1 \cdot a^{-5} = a^{-5} = a^{0-5}$.

Теперь проведем доказательство свойства (1) в общем виде. Пусть $a \neq 0$, $m \geqslant 0$, $n < 0$. Положим $n = -k$, где $k \in N$. Если $m > |n|$, то имеем:

$$a^m a^n = a^m a^{-k} = a^m \cdot \frac{1}{a^k} = \frac{a^m}{a^k} =$$

$$= a^m : a^k = a^{m-k} = a^{m+(-k)} = a^{m+n}.$$

Если $m < |n|$, то имеем:

$$a^m a^n = a^m a^{-k} = a^m \cdot \frac{1}{a^k} = \frac{1}{a^{-m}} \cdot \frac{1}{a^k} = \frac{1}{a^{-m} a^k} =$$

$$= \frac{1}{a^{k-m}} = a^{-(k-m)} = a^{m-k} = a^{m+(-k)} = a^{m+n}.$$

Пусть $a \neq 0$, то $m < 0$, $n < 0$.

Учитывая, что в этом случае $-m > 0$ и $-n > 0$, получим:

$$a^m a^n = \frac{1}{a^{-m}} \cdot \frac{1}{a^{-n}} = \frac{1}{a^{-m} a^{-n}} = \frac{1}{a^{-(m+n)}} = a^{m+n}.$$

Проведем доказательство свойства (2).

Пусть $a \neq 0$, m и n — любые целые числа, $a^m : a^n = a^x$. Тогда по определению частного:

$$a^x \cdot a^n = a^m.$$

Согласно тождеству (1) имеем:

$$a^{x+n} = a^m.$$

Отсюда $x + n = m$, $x = m - n$. Значит,

$$a^m : a^n = a^{m-n}.$$

Докажем свойство (4).

Пусть $a \neq 0$, $b \neq 0$ и n — целое отрицательное число. Значит, $-n$ — целое положительное число. Имеем:

$$(ab)^n = \frac{1}{(ab)^{-n}} = \frac{1}{a^{-n} b^{-n}} = \frac{1}{a^{-n}} \cdot \frac{1}{b^{-n}} = a^n b^n.$$

Аналогично можно доказать свойства (3) и (5).

Таким образом, действия над степенями с целыми показателями выполняются по тем же правилам, что и действия над степенями с натуральными показателями. При этом при делении степеней с отрицательными основаниями снимается ограничение, согласно которому показатель степени делимого должен быть не меньше показателя степени делителя (т. е. теперь показатели степеней делимого и делителя могут быть любыми целыми числами).

Пример 1. Представим в виде степени выражение $x^{-8}x^{10}$. Применив свойство (1), получим:

$$x^{-8}x^{10} = x^{-8+10} = x^2.$$

Пример 2. Найдем значение выражения $(5^{-1})^{-6} : \left(\frac{1}{5}\right)^{-3}$.

Применив свойство (3) и определение степени с отрицательным показателем, получим:

$$(5^{-1})^{-6} : \left(\frac{1}{5}\right)^{-3} = 5^6 : (5^{-1})^{-3} = 5^6 : 5^3 = 5^3 = 125.$$

Пример 3. Докажем, что значение выражения

$$(-8a^{-4})^3 : \left(-\frac{1}{4}a^3\right)^{-6}$$

при любом a, отличном от нуля, является отрицательным числом.

Применяя свойства степени, получим:

$$(-8a^{-4})^3 : \left(-\frac{1}{4}a^3\right)^{-6} = (-2^3a^{-4})^3 : (-2^{-2}a^3)^{-6} =$$

$$= -2^9a^{-12} : (2^{12}a^{-18}) = -2^{-3}a^6 = -\frac{1}{8}a^6.$$

Степень a^6 при любом $a \neq 0$ — положительное число.

Следовательно, $-\frac{1}{8}a^6 < 0$.

1117. Представьте в виде степени:

а) a^6a^{-3}; г) $x^6 : x^8$; ж) $(a^{-3})^4$;
б) $b^{-1}b^{-3}$; д) $y^4 : y^{-2}$; з) $(b^5)^{-2}$;
в) $c^{12}c^0$; е) $z^{-5} : z^{-8}$; и) $(c^{-8})^{-4}$.

1118. Найдите значение выражения:

а) $2^{-5} \cdot 2^6$; г) $5^3 : 5^5$; ж) $(3^{-2})^2$;
б) $3^{-6} \cdot 3^5$; д) $6^{-2} : 6^{-4}$; з) $(5^2)^{-1}$;
в) $7^{-2} \cdot 7^0$; е) $10^3 : 10^{-1}$; и) $(10^{-2})^{-3}$.

1119. Вычислите:

а) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$; в) $\left(-\frac{1}{8} \cdot 36\right)^{-2}$; д) $\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}\right)^{-2}$;

б) $(4 \cdot 27)^{-1}$; г) $\left(-\frac{4}{9}\right)^{-1}$; е) $\left(7 \cdot \frac{1}{4}\right)^{-1}$.

1120. Докажите тождество, где $a \neq 0$ и $b \neq 0$:

а) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$; б) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{n}$, где $n \in \mathbf{Z}$.

1121. Сравните a и a^{-1}, если:

а) $a > 1$; б) $0 < a < 1$; в) $-1 < a < 0$; г) $a < -1$.

1122. Представьте выражение в виде степени с основанием 2:

а) $16 \cdot 4^{-1}$; г) $(16^2)^{-3}$;

б) $\frac{1}{32} \cdot 4^{-2}$; д) $(32^{-3})^3$.

в) $8^{-2} \cdot 4^4$;

1123. Представьте выражение в виде степени с основанием 3:

а) $9^2 \cdot (3^4)^{-2}$; в) $(3^5)^{-1} \cdot (9^{-2})^3$;

б) $(81^{-2})^{-1} \cdot 27^2$; г) $(27^{-2})^4 \cdot (81^3)^2$.

1124. Представьте число 3^{36} в виде степени с основанием:

а) 9; б) 27; в) 81; г) $\frac{1}{3}$; д) $\frac{1}{9}$; е) $\frac{1}{27}$.

1125. Найдите значение m, зная, что верно равенство:

а) $5^m \cdot 5^{m+1} = 125$; г) $5^{2m} \cdot 5^{m+2} = 25^7$;

б) $5^m \cdot 5^{m+1} = 5^7$; д) $5^{2m} \cdot 25^{2m+1} = 25^4$;

в) $5^m \cdot 5^{m+1} = 5^{-7}$; е) $125^m \cdot 5^{m+3} = 125^5$.

1126. Найдите значение выражения:

а) $9^{-4} \cdot 27^3$; в) $(2^{-4} \cdot 4^3)^2$; д) $(12^2 \cdot 15^{-1})^2$;

б) $8^6 \cdot 64^{-3}$; г) $(25^{-3} \cdot 5^7)^{-1}$; е) $(35^{-2} \cdot 49^2)^{-1}$.

1127. Представьте в виде десятичной дроби:

а) 10^{-2}; б) 10^{-4}; в) $24 \cdot 10^{-3}$; г) $3{,}5 \cdot 10^{-5}$.

1128. Упростите выражение:

а) $2{,}5a^{-2}b^3 \cdot 8a^3b^{-2}$; г) $\frac{1}{7}a^{2n-5}b^{3n+1} \cdot 2\frac{8}{17}a^{n+6}b^{1-2n}$;

б) $2{,}4p^{-3}q^4 \cdot \frac{1}{6}p^3q^{-4}$; д) $9\frac{3}{8}x^{2-n}y^{2n+3} \cdot 0{,}32x^{2n+2}y^{4-2n}$;

в) $\frac{3}{4}m^6n^{-9} \cdot 1\frac{1}{3}m^4n^2$; е) $4{,}86c^{5n+2}d^{8-n} \cdot 1\frac{7}{243}c^{-4n}d^{n-8}$.

1129. Представьте в виде произведения:

а) $(x^{-2}y^{-2})^{-1}$; г) $(-3a^6b^{-8})^4$; ж) $(x^{-n}b^4)^{-4}$;

б) $(x^3y^{-4})^{-2}$; д) $(-0{,}5c^{-3}b^{-4})^{-3}$; з) $(y^{-5}a^{-6})^{-2n}$;

в) $(0{,}1c^{-5}b^2)^{-3}$; е) $\left(\frac{2}{3}c^5d^{-2}\right)^{-4}$; и) $(c^{-2n}d^{3n})^{-1}$.

1130. Представьте произведение в виде степени:

а) $64a^{-3}$; в) $\frac{1}{128}x^{14}y^{21}$; д) $7\frac{19}{32}c^{10n}d^{-5n}$;

б) $0{,}0001b^6$; г) $100^{-3}x^{18}y^{-24}$; е) $12{,}167a^{-9n}b^{12n}$.

1131. Представьте выражение в виде дроби, не содержащей степени с отрицательным показателем:

а) $(a^{-2}b^2)^{-2}\cdot(a^4b^{-3})^3$; в) $(0{,}01x^2y^{-3})^{-2}\cdot(5x^{-2}y^4)^{-3}$;

б) $(a^7b^{-5})^3\cdot(a^{-6}b^3)^5$; г) $(3^{-1}x^{-1}y^{-2})^{-4}\cdot(54x^4y^4)^{-2}$.

Упражнения для повторения

1132. Упростите выражение

$$\left(3a+1-\frac{1}{1-3a}\right):\left(3a-\frac{9a^2}{3a-1}\right).$$

1133. Принадлежит ли графику функции

$$y=(x+5)^2-(x-5)^2$$

точка:

а) $A(0{,}005;\ 1)$; б) $B\left(-\frac{1}{4};\ 5\right)$; в) $C\left(-\frac{1}{5};\ -4\right)$?

1134. Решите уравнение:

а) $6x^{-1}+9x^{-1}=5$; б) $\frac{10}{x-1}-2(x-1)^{-1}=4$.

Контрольные вопросы и задания

1. Дайте определение степени с целым показателем. Представьте выражение 7^{-15} в виде степени с положительным показателем.

2. Сформулируйте свойства произведения степеней, частного степеней и степени степени. Проведите доказательство свойства $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$ для случая $m=-5$, $n=7$.

3. Сформулируйте свойства степени произведения и степени дроби. Проведите доказательство одного из этих свойств для случая $n = -6$.

§ 15. ВЫРАЖЕНИЯ, СОДЕРЖАЩИЕ СТЕПЕНИ С ЦЕЛЫМИ ПОКАЗАТЕЛЯМИ

45. Преобразование выражений, содержащих степени с целыми показателями

В связи с введением степеней с целыми отрицательными показателями расширим понятие рационального выражения. Рациональным выражением будем теперь называть всякое выражение, которое составлено из чисел и переменных с помощью действий сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в целую степень.

Такие выражения, как x^{-1}, $(a + b)^{-2}$, относятся к классу дробных рациональных выражений, так как $x^{-1} = \dfrac{1}{x}$,

$$(a + b)^{-2} = \frac{1}{(a + b)^2}.$$

Рассмотрим примеры преобразований рациональных выражений, которые содержат степени с целыми показателями.

Пример 1. Упростим выражение:

а) $\left(\dfrac{a^{-1}+b^{-1}}{a+b}\right)^{-1}$; б) $\dfrac{a^{-2} + a}{a^{-3}}$.

Имеем:

а) $\left(\dfrac{a^{-1}+b^{-1}}{a+b}\right)^{-1} = \dfrac{a+b}{a^{-1}+b^{-1}} = \dfrac{a+b}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}} = \dfrac{a+b}{\dfrac{b+a}{ab}} = ab.$

б) Здесь выгодно в числителе дроби вынести за скобки множитель a^{-3}.

Имеем:

$$\frac{a^{-2} + a}{a^{-3}} = \frac{a^{-3}\left(a + a^4\right)}{a^{-3}} = a + a^4.$$

Пример 2. Представим выражение

$$(ab^{-2} + a^{-2}b)(a^{-1} + b^{-1})^{-1}$$

в виде рациональной дроби.

Имеем:

$$(ab^{-2} + a^{-2}b)(a^{-1} + b^{-1})^{-1} = \left(\frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2}\right)\cdot\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)^{-1} =$$

$$= \frac{a^3+b^3}{a^2b^2}\cdot\left(\frac{a+b}{ab}\right)^{-1} = \frac{(a+b)(a^2-ab+b^2)\cdot ab}{a^2b^2(a+b)} = \frac{a^2-ab+b^2}{ab}.$$

Пример 3. Упростим выражение

$$(x^2 + xy + y^2)(x^{-2} + x^{-1}y^{-1} + y^{-2})^{-1}.$$

Вынесем за скобки x^2y^2 в многочлене $x^2 + xy + y^2$ и продолжим преобразование:

$$(x^2 + xy + y^2)(x^{-2} + x^{-1}y^{-1} + y^{-2})^{-1} =$$
$$= x^2y^2(y^{-2} + x^{-1}y^{-1} + x^{-2})(x^{-2} + x^{-1}y^{-1} + y^{-2})^{-1} =$$
$$= x^2y^2(y^{-2} + x^{-1}y^{-1} + x^{-2})^0 = x^2y^2.$$

Пример 4. Найдем значение выражения

$$\frac{(2a-b+1)^{-2}+2(4a^2-(b-1)^2)^{-1}+(2a+b-1)^{-2}}{(2a-b+1)^2+2(4a^2-(b-1)^2)+(2a+b-1)^2}$$

при $a=\frac{1}{4}$ и $b=-\frac{1}{2}$.

Сначала упростим выражение. Для этого введем подстановку: $2a - b + 1 = x$, $2a + b - 1 = y$. Тогда данное выражение примет вид:

$$\frac{x^{-2}+2(xy)^{-1}+y^{-2}}{x^2+2xy+y^2}.$$

Выполним преобразования этого выражения:

$$\frac{x^{-2}+2(xy)^{-1}+y^{-2}}{x^2+2xy+y^2} = \frac{(x^{-1}+y^{-1})^2}{(x+y)^2} = \left(\frac{x^{-1}+y^{-1}}{x+y}\right)^2 = \left(\frac{x^{-1}\cdot y^{-1}(y+x)}{x+y}\right)^2 =$$

$$= x^{-2}y^{-2} = \frac{1}{x^2y^2} = \frac{1}{(xy)^2}.$$

Произведем обратную замену и выполним вычисления:

$$\frac{1}{(xy)^2} = \frac{1}{(2a-(b-1))(2a+(b-1))} = \frac{1}{4a^2-(b-1)^2} = \frac{1}{4\cdot\frac{1}{16}-\left(-\frac{1}{2}-1\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{4}-\frac{9}{4}} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}.$$

1135. Представьте выражение в виде рациональной дроби:

а) $ab^{-1} + a^{-1}b$; г) $b^2(a^{-2} - b^{-2})$;

б) $(ab)^{-1} + (ab)^2$; д) $(a^{-1} + b^{-1})(a + b)^{-1}$;

в) $a^{-1}(a^{-1} - b^{-1})$; е) $(a^{-1} + b)(a - b^{-1})$.

1136. Докажите тождество:

а) $(a^{-1} + b^{-1})^2 = \dfrac{(a+b)^2}{a^2b^2}$; в) $(a^{-1} + b^{-1})^3 = \dfrac{(a+b)^3}{a^3b^3}$;

б) $(a^{-1} - b^{-1})^2 = \dfrac{(a-b)^2}{a^2b^2}$; г) $(a^{-1} - b^{-1})^3 = \dfrac{(b-a)^3}{a^3b^3}$.

1137. Является ли тождеством равенство:

а) $(a + b)^{-2} = a^{-2} + 2a^{-1}b^{-1} + b^{-2}$;

б) $a^{-2} - b^{-2} = (a^{-1} + b^{-1})(a^{-1} - b^{-1})$?

1138. Представьте в виде рациональной дроби:

а) $(a^{-1} + b^{-1})^2 - (a^{-1} - b^{-1})^2$; в) $(a^{-1} + b^{-1})^3 - (a^{-1} - b^{-1})^3$;

б) $(a^{-1} + b^{-1})^2 + (a^{-1} - b^{-1})^2$; г) $(a^{-1} + b^{-1})^3 + (a^{-1} - b^{-1})^3$.

1139. Упростите выражение:

а) $\dfrac{x+1}{x^{-1}+1}$; в) $\dfrac{y^{-1}-1}{y-1}$; д) $\dfrac{a^2+b^2}{ab^{-1}+a^{-1}b}$;

б) $\dfrac{x^2-x+1}{x^{-2}-x^{-1}+1}$; г) $\dfrac{y^{-4}+y^{-2}}{y^4+y^2}$; е) $\dfrac{a^{-4}+b^{-4}+2a^{-2}b^{-2}}{a^4+b^4+2a^2b^2}$.

1140. Докажите, что значение выражения

$$\frac{a^{-1}b^2-a^2b^{-1}}{a^{-3}-b^{-3}}$$

является неотрицательным числом при всех допустимых значениях a и b.

1141. Докажите, что если $a + a^{-1} = b$, то $a^3 + a^{-3} = b^3 - 3b$.

1142. Упростите выражение:

а) $\dfrac{(a-b)^{-2}+2(a^2-b^2)^{-1}+(a+b)^{-2}}{(a+b)^2+2(a^2-b^2)+(a-b)^2}$;

б) $\dfrac{(x+y)(x-y)^{-1}+(x-y)(x+y)^{-1}-2}{(x+y)(x-y)^{-1}-(x-y)(x+y)^{-1}}$;

в) $\dfrac{1+(a+b)^{-1}}{1-(a+b)^{-1}} \cdot \dfrac{(a+b+1)^{-2}}{(a+b-1)^{-2}}$;

г) $\dfrac{(a-b)\left(1-(a+b)^{-1}\right)}{(1-2a)\left(a^2-b^2\right)^{-1}+1}$;

д) $\dfrac{(a+b-1)^{-2}+(a-b+1)^{-2}}{2(a+b)\left(a^2-(b-1)^2\right)^{-2}} : \left(\dfrac{1}{a^{-2}}+\dfrac{1}{(b-1)^{-2}}\right)$;

е) $\dfrac{(n-1)(n+1)^{-2}-2n\left(n^2-1\right)^{-1}+(n+1)(n-1)^{-2}}{8n\left(n^4-1\right)^{-1}}$.

1143. Докажите, что при всех допустимых значениях переменных значение выражения не зависит от значений c и x:

а) $\dfrac{(c-x)^2-(c-x)^{-2}}{(c-x)^2-1}+(c-x)^{-2}$;

б) $\dfrac{3\left(c^2+cx+x^2\right)^{-1}-\left(c^2-cx+x^2\right)^{-1}}{(c-x)^2\left(c^4+c^2x^2+x^4\right)}$.

Упражнения для повторения

1144. Докажите, что при любом целом n верно равенство:
а) $2^n + 2^n = 2^{n+1}$; б) $3^n + 3^n + 3^n = 3^{n+1}$.

1145. Постройте график функции $y = x^2$ и перечислите свойства этой функции.

1146. Известно, что точка $B(6; 2)$ принадлежит графику функции $y = kx + 1$. Найдите k.

1147. Из формулы $\dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$ выразите:

а) a через b и c; б) b через a и c.

46. Стандартный вид числа

В физике, астрономии, технике часто приходится иметь дело с величинами, значения которых выражаются очень большими или очень малыми числами.

Например, масса Земли равна 5 980 000 000 000 000 000 000 т, а масса одного атома железа 0, 000 000 000 000 000 000 000 0927 г. Такие числа не только трудно читать, но о них даже трудно получить ясное представление, с ними неудобно выполнять вычисления. Поэтому очень большие и очень малые числа принято записывать в виде $a \cdot 10^n$, где a — число, заключенное между 1 и 10, а n — целое число. Такую запись называют стандартным видом числа.

Стандартным видом числа x называют запись этого числа в виде $a \cdot 10^n$, где $1 \leqslant a < 10$ и $n \in Z$. Число a называют значащей частью числа x, а целое число n называют порядком этого числа.

Масса Земли в стандартном виде запишется так: $5{,}98 \cdot 10^{21}$ т, а масса одного атома железа — в виде $9{,}27 \cdot 10^{-23}$ г.

Порядок числа позволяет оценить, насколько велико или мало число. Он дает возможность сравнивать большие или малые числа.

Например, известно, что масса Юпитера равна $1{,}90 \cdot 10^{24}$ т. Сравнивая ее с массой Земли, мы можем сказать, что она на 3 порядка больше массы Земли. Это означает, что масса Юпитера приблизительно в 10^3, т. е. в 1000 раз, больше массы Земли.

Известно, что сила звука (громкость) оказывает на человека как положительное, так и отрицательное воздействие. В акустике силу звука измеряют в единицах Вт/см^2. Сравним шорох листьев в лесу в тихую погоду (он оценивается как $1 \cdot 10^{-15}$ Вт/см^2) и шум на оживленной городской улице ($1 \cdot 10^{-10}$ Вт/см^2). Из этого сравнения видно, что шум на городской улице на 5 порядков, т. е. в 100 000 раз, больше шороха листьев в лесу. Какой из этих «шумов» благоприятнее для человека, нетрудно сделать вывод. Заметим, что сила звука, равная $1 \cdot 10^{-3}$ Вт/см^2, вызывает у человека болевое ощущение.

Рассмотрим примеры записи числа в стандартном виде.

Пример 1. Представим в стандартном виде число

$$x = 63\ 800\ 000.$$

Число x должно иметь вид $6{,}38 \cdot 10^n$. Поставив в числе x запятую после первой цифры 6 (6,3800000), мы тем самым отделили запятой 7 цифр справа, т. е. уменьшили число x в 10^7 раз. Поэтому x больше 6,38 в 10^7 раз.

Значит,

$$x = 6{,}38 \cdot 10^7.$$

Пример 2. Запишем в стандартном виде число

$$x = 0{,}0000327.$$

Число x должно иметь вид $3{,}27 \cdot 10^n$, т. е. в значащей части числа должна быть одна цифра, отличная от нуля. Переставив запятую на 5 знаков вправо, мы увеличили число в 10^5 раз. Поэтому число x меньше числа 3,27 в 10^5 раз. Значит,

$$x = 3{,}27 : 10^5 = 3{,}27 \cdot 10^{-5}.$$

Пример 3. Представим произведение

$$(9{,}5 \cdot 10^8) \cdot (1{,}38 \cdot 10^{-2})$$

в стандартном виде числа:

$$(9{,}5 \cdot 10^8) \cdot (1{,}38 \cdot 10^{-2}) = (9{,}5 \cdot 1{,}38) \cdot (10^8 \cdot 10^{-2}) =$$
$$= 13{,}11 \cdot 10^6 = 1{,}311 \cdot 10^7.$$

Пример 4. Разделим $1{,}767 \cdot 10^5$ на $4{,}63 \cdot 10^{-3}$.

Имеем:

$$(1{,}767 \cdot 10^5) : (4{,}63 \cdot 10^{-3}) = \frac{1{,}767 \cdot 10^5}{4{,}63 \cdot 10^{-3}} =$$

$$= \frac{1{,}767}{4{,}63} \cdot \frac{10^5}{10^{-3}} \approx 0{,}3816... \cdot 10^8 \approx 3{,}82 \cdot 10^7.$$

1148. Укажите значащую часть и порядок числа, записанного в стандартном виде:

а) $3{,}7 \cdot 10^8$; в) $9{,}1 \cdot 10^{-7}$; д) $8{,}37 \cdot 10$;
б) $6{,}42 \cdot 10^{12}$; г) $5{,}46 \cdot 10^{-3}$; е) $1{,}23 \cdot 10^{-1}$.

1149. Запишите в стандартном виде число и укажите значащую часть и порядок числа:

а) 76 000 000; в) 20 300; д) 0,0000000027;
б) 138 000 000 000; г) 0,00384; е) 0,0307.

1150. Назовите порядок числа x, если:

а) $100 \leqslant x < 1000$; в) $0{,}01 \leqslant x < 0{,}1$;
б) $10\,000 \leqslant x < 100\,000$; г) $0{,}0001 \leqslant x < 0{,}001$.

1151. Порядок числа x на n больше или меньше порядка числа y. Во сколько раз x больше y или x меньше y, если:

а) $n = 2$; б) $n = 5$; в) $n = -2$; г) $n = -6$?

1152. Выразите:

а) $4{,}2 \cdot 10^2$ т в граммах;

б) $6{,}3 \cdot 10^3$ кг в граммах;

в) $3{,}6 \cdot 10^{-2}$ г в килограммах;

г) $1{,}28 \cdot 10^{-3}$ кг в тоннах;

д) $2 \cdot 10^3$ г в тоннах;

е) $4{,}2 \cdot 10^{-1}$ т в центнерах.

1153. Выразите время в секундах и запишите полученное число в стандартном виде:

а) 1 час; б) 1 сутки; в) 30 суток; г) 1 год.

1154. Выполните умножение:

а) $(6{,}25 \cdot 10^3)(2{,}6 \cdot 10^{-4})$; в) $(7{,}2 \cdot 10^{-3})(1{,}4 \cdot 10^{-5})$;

б) $(1{,}44 \cdot 10^5)(2{,}5 \cdot 10^{-2})$; г) $(8{,}3 \cdot 10^{-7})(2{,}4 \cdot 10^3)$.

1155. Выполните деление:

а) $(6{,}24 \cdot 10^2) : (3{,}15 \cdot 10^5)$; б) $(1{,}92 \cdot 10^8) : (2{,}6 \cdot 10^{-2})$.

1156. Масса Земли $5{,}98 \cdot 10^{21}$ т, а масса воздуха, окружающего Землю, равна $5 \cdot 10^{15}$ т. На сколько порядков масса Земли больше массы воздуха?

1157. Расстояние от Солнца до Земли $1{,}49 \cdot 10^8$ км. Скорость света равна $3 \cdot 10^5$ км/с. За какое время свет доходит от Солнца до Земли?

Упражнения для повторения

1158. Представьте в виде рациональной дроби выражение:

а) $(a^{-1} - b^{-1})^{-1} : (ab^{-1} - a^{-1}b)$; б) $\dfrac{(a^{-2}+b^{-2})^2}{(a^2b^{-2}+1)^2}$.

1159. Постройте график функции $y = x^3$. Найдите:

а) значение функции, соответствующее значению аргумента x, равному: $\frac{1}{2}$; 1,5; 2,5;

б) множество значений x, при которых значение функции меньше 1, но больше -1; меньше $\frac{1}{8}$, но больше $-\frac{1}{8}$.

1160. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} 3-2(3-x)>6-2{,}5x, \\ 4>\dfrac{2}{3}x-0{,}2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3{,}4-(3-x)<2x-1, \\ 5<\dfrac{3}{7}x-1. \end{cases}$

1161. Найдите область определения выражения:

а) $\dfrac{\sqrt{2x-6}+\sqrt{18-x}}{\sqrt{7{,}2-1{,}2x}}$; б) $\dfrac{\sqrt{34{,}2-3{,}8x}}{\sqrt{x-4}-2}$.

Контрольные вопросы и задания

Дайте определение стандартного вида числа.

Запишите в стандартном виде число 0,00027, укажите значащую часть и порядок числа.

Дополнительные упражнения к главе 6

К параграфу 14

1162. Дана последовательность:

$$4,\ 2,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \frac{1}{32},\ \frac{1}{64},\ \frac{1}{128},\ \frac{1}{256},\ \frac{1}{512}.$$

Запишите эту последовательность, представив каждый ее член в виде степени с основанием 2.

1163. Докажите, что значения выражений являются взаимно обратными числами:

а) $\left(\dfrac{4}{5}\right)^3$ и $(0{,}8)^{-3}$; в) $3{,}5^4$ и $\left(\dfrac{2}{7}\right)^{-4}$;

б) 1000^{-2} и $(0{,}001)^{-2}$; г) $\left(6\dfrac{1}{4}\right)^{-5}$ и $(0{,}16)^{-5}$.

1164. Используя прикидку результатов действий, сравните с нулем значение выражения:

а) $7\cdot 1\dfrac{2}{3}-35\cdot(5)^{-1}$; в) $(1{,}5\cdot 10^{-5})(2{,}1\cdot 10^{6})-3$;

б) $12:\left(-\dfrac{1}{7}\right)+876\cdot 2^{-3}$; г) $35-(6{,}8\cdot 10^{7})(4{,}2\cdot 10^{-5})$.

1165. Представьте в виде степени с основанием 3 выражение, в котором n — целое число:

а) $3^n \cdot 3^{n-1}$; в) $3^{5n+2} : 3^{3n+5}$; д) $27^{n-1} : \left(\frac{1}{9}\right)^n$;

б) $(3^n)^{-2} \cdot 3^{4n}$; г) $\left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot 9^n$; е) $\left(\frac{1}{81}\right)^n \cdot 243^{n+2}$.

1166. Представьте в виде степени с основанием 5 выражение, в котором n — целое число:

а) $(0,1)^n \cdot 2^n$; б) $15^{2n}\left(\frac{1}{45}\right)^n$; в) $10^n \cdot \left(\frac{1}{1250}\right)^n$.

1167. Вычислите:

а) $7,5^{-1} : (5^{-1} + 3^{-1})$; в) $(2^{-1} + 3^{-1})^2 : (2^{-1} - 3^{-1})^2$;

б) $3^{-2} : (6^{-1} - 3^{-1})^2$; г) $(12^{-1} + 18^{-1}) : (12^{-1} - 18^{-1})$.

1168. Верно ли неравенство:

а) $0,9 - 1,1 \cdot 1,3 < 0,014$;

б) $168 \cdot (-5)^{-1} < 168 \cdot (-6)^{-1}$;

в) $(1,4 \cdot 10^{-5}) \cdot (1,6 \cdot 10^6) < 4$;

г) $(1,5 \cdot 10^{-3}) \cdot (2,1 \cdot 10^4) > 30$?

1169. Решите уравнение:

а) $3x^2 - |x - 3| - 1 = 0$;

б) $2x^{-2} - 3x^{-1} - 2 = 0$;

в) $(x^2 - 1)^2 - 18(x^2 - 1) + 45 = 0$;

г) $(x^3 + 1)^2 - 10(x^3 + 1) + 9 = 0$.

К параграфу 15

1170. Представьте в виде рациональной дроби:

а) $(x - x^{-1}) : (x^2 - x^{-1})$; в) $\left(\frac{a^{-1}+b^{-1}}{ab^{-1}-ba^{-1}}\right)^2$;

б) $(y + y^{-1} - 1) : (y^2 + y^{-1})$; г) $\left(\frac{ab^{-1}+a^{-1}b+1}{a^{-2}b-ab^{-2}}\right)^{-1}$.

1171. Найдите значение выражения $\frac{(a+x)^{-2}+(a-x)^{-2}}{(a-x)^{-2}-(a+x)^{-2}}$, зная, что $\frac{a}{x} = 2{,}5$.

1172. Сократите дробь, зная, что n — целое число:

а) $\frac{5^{n+1}-5^n}{4}$; в) $\frac{3^n+3^{-n}}{9^n+1}$; д) $\frac{a^n+a^{n+1}+a^{n+2}}{a^{-n}+a^{1-n}+a^{2-n}}$;

б) $\frac{8^n-2^n}{4^n-1}$; г) $\frac{7^n+7^{n+1}}{7^{-n}+7^{1-n}}$; е) $\frac{b^{3n}+b^{2n}+b^n}{b^{-3n}+b^{-2n}+b^{-n}}$.

1173. Докажите, что при любых целых значениях m и n значение выражения — одно и то же число:

а) $\frac{2^m\cdot 3^{n-1}-2^{m-1}\cdot 3^n}{2^m\cdot 3^n}$; б) $\frac{5^m\cdot 4^n}{5^{m-2}\cdot 2^{2n}+5^m\cdot 2^{2n-1}}$.

1174. Упростите выражение:

а) $\left(\frac{a^{-1}-b^{-1}}{a^{-1}+b^{-1}}-\frac{a^{-1}+b^{-1}}{a^{-1}-b^{-1}}\right):\frac{1}{ab^{-1}-a^{-1}b}$;

б) $\left(\frac{x^{-3}+y^{-3}}{x^{-1}+y^{-1}}-x^{-1}y^{-1}\right):\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)^2$.

1175. Докажите, что значение выражения не зависит от n (n — целое число):

а) $\frac{5^{n+1}\cdot 2^{n-2}+5^{n-2}\cdot 2^{n-1}}{10^{n-2}}$; б) $\frac{21^n}{3^{n-1}\cdot 7^{n+1}+3^n\cdot 7^n}$.

1176. Упростите выражение $\frac{(ab^{-1}+a^{-1}b+1)\cdot(a^{-1}-b^{-1})^2}{a^2b^{-2}+a^{-2}b^2-(ab^{-1}+a^{-1}b)}$.

1177. Упростите выражение $\frac{1+(a+x)^{-1}}{1-(a+x)^{-1}}\cdot\left(1-\frac{1-(a^2+x^2)}{2ax}\right)$ и найдите его значение при $x = \frac{1}{a-1}$.

1178. Представьте в виде рациональной дроби выражение:

а) $(a^{-2}b^{-1})^3 : (ab)^{-2}$; б) $(b^{-2}c + bc^{-2})(b^{-1} + c^{-1})^{-1}$.

1179. Масса Солнца равна $1{,}98 \cdot 10^{30}$ кг, масса Венеры — $4{,}9 \cdot 10^{24}$ кг, масса Марса — $6{,}5 \cdot 10^{23}$ кг, масса Луны — $7{,}4 \cdot 10^{22}$ кг. Во сколько раз масса Солнца больше массы:

а) Венеры; б) Земли; в) Марса; г) Луны?

1180. Выполните действия над числами, записанными в стандартном виде:

а) $(5{,}6 \cdot 10^{10}) \cdot (1{,}4 \cdot 10^{-7})$; в) $5{,}9 \cdot 10^{4} + 3{,}8 \cdot 10^{3}$;

б) $(1{,}44 \cdot 10^{-9}) : (1{,}2 \cdot 10^{-12})$; г) $7{,}12 \cdot 10^{6} - 4{,}28 \cdot 10^{5}$.

1181. Порядок числа x равен 12. Определите порядок числа:

а) $100x$; б) $0{,}0001x$; в) $10^{8}x$; г) $10^{-5}x$.

1182. Порядок числа x равен 20, а порядок числа y равен 13. Каким может быть порядок числа:

а) xy; б) $\dfrac{x}{y}$?

1183. В атомной физике за единицу массы принята атомная единица массы (обозначается а.е.м).

$$1 \text{ а.е.м} = 1{,}66 \cdot 10^{-24} \text{ г.}$$

Выразите в граммах массу одного атома водорода, гелия, алюминия и свинца, зная, что:

масса атома водорода равна 1,008 а.е.м,
масса атома гелия равна 3,016 а.е.м,
масса атома алюминия равна 29,99 а.е.м,
масса атома свинца равна 205,97 а.е.м.

ГЛАВА 7

ФУНКЦИИ И ГРАФИКИ

§ 16. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ

47. Функция, область определения и область значений функции

Ранее вы познакомились с понятием функции, со свойствами и графиками некоторых функций и способами задания функций.

Напомним, что **функцией называется соответствие между множествами X и Y, при котором каждому элементу множества X соответствует единственный элемент множества Y.**

Обозначим буквой x переменную, значениями которой являются элементы множества X, а буквой y — переменную, значениями которой являются элементы множества Y. Тогда каждому значению переменной x соответствует единственное значение переменной y. Переменную x, как известно, называют независимой переменной или аргументом, а переменную y — зависимой переменной. Говорят также, что y является функцией от x.

Если переменная y является функцией от переменной x, то используется запись $y = f(x)$ (читается: «y равен f от x»).

Если функция задана выражением с переменной x, то символом $f(x)$ обозначается выражение, которым задается эта функция.

Пусть, например, $f(x) = \dfrac{3x+1}{x-2}$ и требуется найти значение функции f при $x = 4$. Тогда $f(4)$ — это значение функции при $x = 4$, т. е. $f(4) = \dfrac{3\cdot 4+1}{4-2} = \dfrac{13}{2} = 6{,}5$. Аналогично $f(-3) = \dfrac{3\cdot(-3)+1}{-3-2} = \dfrac{8}{5} = 1{,}6$.

Если одновременно рассматриваются несколько функций, то для их обозначения используются другие буквы латинского или греческого алфавитов. Например, буквы g, h, φ.

Множество значений аргумента называют *областью определения функции.*

Если задается функция, то указывается правило соответствия и область ее определения. Например, для функции $f(x) = x^2$, где $-3 \leqslant x \leqslant 3$, областью определения является промежуток $[-3; 3]$.

Если функция задана формулой $y = f(x)$ и область ее определения не указана, то областью определения этой функции является множество допустимых значений переменной x для выражения $f(x)$. Например, если функция задана формулой $y=\frac{x^3}{x-1}$, то областью определения этой функции является множество действительных чисел, кроме числа 1.

Область определения функции $y = f(x)$ принято обозначать символом $D(f)$ (читается: «D от f») или $D(y)$ (читается: «D от y»).

Используя эти обозначения, область определения в рассмотренных выше примерах можно записать так: $D(f) = [-3; 3]$, $D(y) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.

Все значения, которые принимает функция, называют *областью значений функции.*

Для области значений функции $y = f(x)$ принято обозначение $E(f)$ (читается: «E от f») или $E(y)$ (читается: «E от y»).

Например, для функции $f(x) = x^2$, где $-3 \leqslant x \leqslant 3$, областью значений служит промежуток $[0, 9]$, т. е. $E(f) = [0; 9]$.

Значения аргумента, при которых функция $y = f(x)$ обращается в нуль, называют *нулями функции.* Промежутки, в которых функция принимает только положительные или только отрицательные значения, называют *промежутками знакопостоянства.*

Пример 1. Пусть функция задана формулой $g(x) = 2x - 3$, где $D(g) = [-1; 4]$. Найдем область значений функции g.

По условию $-1 \leqslant x \leqslant 4$. Применяя свойства числовых неравенств, оценим значение выражения $2x - 3$.

Имеем:

$$-1 \leqslant x \leqslant 4, \quad -2 \leqslant 2x \leqslant 8, \quad -5 \leqslant 2x - 3 \leqslant 5.$$

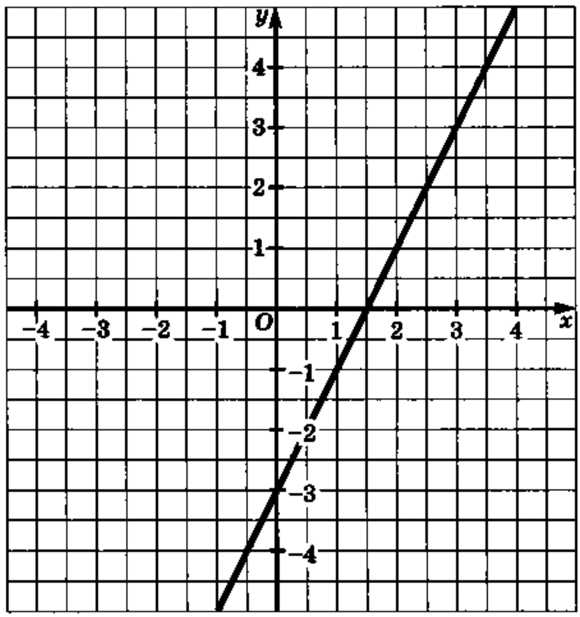


Рис. 51

Значит, $E(g) = [-5;\ 5]$. Это легко увидеть, если обратиться к графику функции g (рис. 51).

Пример 2. Найдем область значений функции, заданной формулой $f(x) = |x|$.

Очевидно, что областью определения функции f является множество действительных чисел, т. е. $D(f) = R$, а областью значений функции является множество неотрицательных чисел, так как модуль действительного числа (по определению модуля) может быть лишь неотрицательным числом. Значит, $E(f) = [0;\ +\infty)$.

Пример 3. Найдем нули и промежутки знакопостоянства функции $y = g(x)$, где $x \in [-5;\ 6]$, заданной графиком на рисунке 52.

Нулями функции g служат числа: -3, 2 и 5;

$g(x) > 0$ при $x \in (-3;\ 2) \cup (5;\ 6]$;

$g(x) < 0$ при $x \in [-5;\ -3) \cup (2;\ 5)$.

Пример 4. Пусть функция задана двумя формулами:

$$y = \begin{cases} -x - 2, \text{ если } -6 \leqslant x < 0, \\ 3x + 1, \text{ если } 0 \leqslant x \leqslant 3. \end{cases}$$

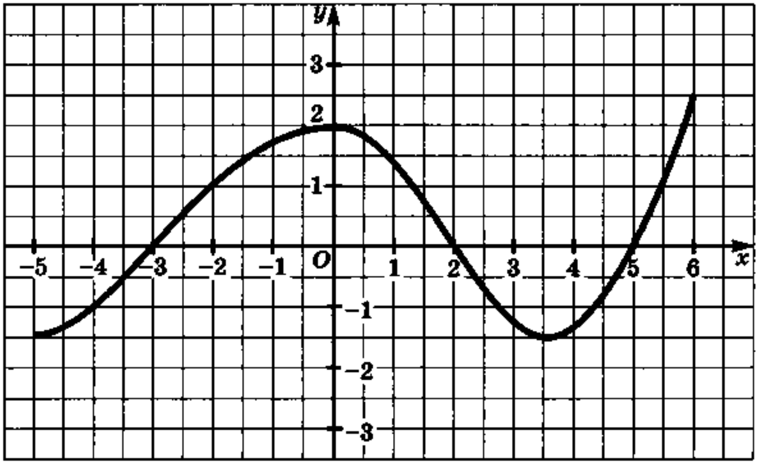


Рис. 52

Найдем область значений функции.
Если $-6 \leqslant x < 0$, то $0 < -x \leqslant 6$ и $-2 < -x - 2 \leqslant 4$.
Если $0 \leqslant x \leqslant 3$, то $0 \leqslant 3x \leqslant 9$ и $1 \leqslant 3x + 1 \leqslant 10$.
Значит, $E(g) = (-2;\ 4] \cup [1;\ 10] = (-2;\ 10]$.

Пример 5. Функция задана формулой $f(x) = x^2 - 5x$. Найдем такое значение a, при котором $f(a) = f(a + 2)$.

Имеем:

$$f(a) = a^2 - 5a,\ f(a + 2) = (a + 2)^2 - 5(a + 2) =$$
$$= a^2 + 4a + 4 - 5a - 10 = a^2 - a - 6.$$

Чтобы найти значение a, надо решить уравнение

$$a^2 - 5a = a^2 - a - 6.$$

Решив его, найдем, что $a = 1{,}5$.

1184. Функция задана формулой $f(x) = 5x - 3$. Найдите:
а) $f(2)$, $f(0)$, $f(0{,}5)$;
б) значение аргумента x, при котором
$f(x) = 12$, $f(x) = 0$, $f(x) = -38$.

1185. Зная, что $g(x) = x^2 - 6x + 8$, найдите:

а) $g(1)$;	в) $g(3)$;	д) $g(0)$;
б) $g(2)$;	г) $g(-2)$;	е) $g(-5)$.

1186. Найдите нули функции $y = f(x)$, если:

а) $f(x) = 8x - 2$; г) $f(x) = x^2 + 4$;

б) $f(x) = x^2 - 9$; д) $f(x) = 2x^{-2} - 5x^{-1} + 2$;

в) $f(x) = x^3 - 4x$; е) $f(x) = x^4 + x^2 - 2$.

1187. Решите уравнение $f(x) = g(x)$, если:

а) $f(x) = 2x - 1$ и $g(x) = 3x - 5$;

б) $f(x) = x^2 - 10$ и $g(x) = 2x - 10$;

в) $f(x) = 2x^2 + 5x + 7$ и $g(x) = x^2 + x + 4$;

г) $f(x) = 2x - 4$ и $g(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 7}{x + 1}$.

1188. Найдите область определения функции, если:

а) $g(x) = 2x - 1$; г) $g(x) = \dfrac{1}{|x| + x}$;

б) $g(x) = \dfrac{1}{x - 5}$; д) $g(x) = \sqrt{(x - 2)(x + 3)}$;

в) $g(x) = \dfrac{1}{|x| - x}$; е) $g(x) = \dfrac{2x + 3}{\sqrt{x^2 + x}}$.

1189. Найдите нули функции, промежутки знакопостоянства и область значений функции, если:

а) $f(x) = 5x - 1$, где $D(f) = [-2; 2]$;

б) $f(x) = -3x + 2$, где $D(f) = [-4; 7]$;

в) $f(x) = 2x - 1$;

г) $f(x) = x^2$.

1190. Функция задана формулой $h(x) = x^2 - 8x$. Найдите такое число a, при котором:

а) $h(a) = h(a + 3)$; б) $h(a) = h(a - 5)$.

1191. Укажите область определения функции и найдите ее область значений, если:

а) $g(x) = \begin{cases} -0{,}5x - 1{,}5, \text{ если } -7 \leqslant x < -1, \\ x^3, \text{ если } -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ -0{,}5x + 1{,}5, \text{ если } 1 < x \leqslant 7; \end{cases}$

б) $f(x) = \begin{cases} -4, \text{ если } -6 \leqslant x < -2, \\ -x^2, \text{ если } -2 \leqslant x < 0, \\ x^2, \text{ если } 0 \leqslant x \leqslant 2, \\ 4, \text{ если } 2 < x \leqslant 8. \end{cases}$

1192. Найдите область определения и область значений функции $y = \dfrac{x^3 - 4x}{x^2 - 4}$ и постройте график этой функции.

1193. Покажите, что точка $A(2; -5)$ принадлежит графику функции $y = x^2 - 5x + 1$.

Упражнения для повторения

1194. Найдите все целые решения системы неравенств:

а) $\begin{cases} 4(2x-1)<21, \\ 2x-0{,}6>1{,}4(x-2); \end{cases}$ б) $\begin{cases} 6y(y+1)<3y(2y-1), \\ 0{,}14-0{,}04y<0{,}74-0{,}1y. \end{cases}$

1195. Докажите, что значение выражения

а) $6^{18} + 36^{20}$ делится на 37;

б) $125^{10} - 25^{14} + 5^{27}$ делится на 11.

1196. Представьте выражение в виде степени с основанием 3 и найдите его значение:

а) $9^{-4} \cdot \left(\dfrac{1}{27}\right)^{-1} \cdot 729$; б) $81^{-1} \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^{-6} \cdot \dfrac{1}{243}$.

48. Растяжение и сжатие графиков функций

Выясним, какая связь существует между графиками функций $y = f(x)$ и $y = kf(x)$, где k — число, не равное нулю.

Пусть графиком функции $y = f(x)$, область определения которой — промежуток [0; 8], является кривая, изображенная на рисунке 53.

Рассмотрим сначала случай, когда $k > 1$.

Построим график функции $y = kf(x)$, где $k = 2$.

Для этого расстояние каждой точки графика функции $y = f(x)$ от оси x увеличим в 2 раза, т. е. умножим на 2 ее ординату.

Построение выполним так: проведем, например, в точках оси x с абсциссами 1, 2, 3, 4, 5 и 7 перпендикуляры к оси x и длины отрезков, заключенных между осью x и соответствующими точками графика данной функции (A, B, C, D, E, F), увеличим в 2 раза. Получим точки A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1. Через эти точки проведем линию, учитывая при этом, что каждая точка графика функции $y = 2f(x)$ должна находиться от оси x на рас-

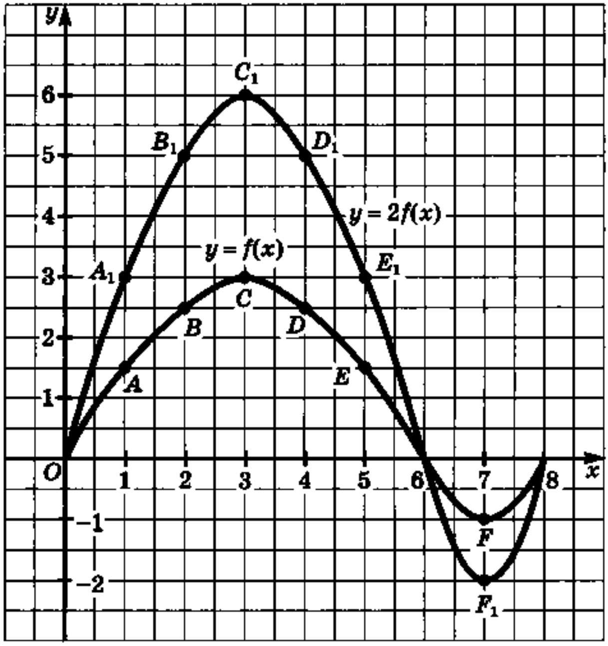


Рис. 53

стоянии в 2 раза большем, чем соответствующая точка графика функции $y = f(x)$. Заметим, что точки с абсциссами 0; 6 и 8, принадлежащие оси x, останутся на месте, так как их ординаты равны нулю ($0 \cdot 2 = 0$). Получим график функции $y = 2f(x)$ (см. рис. 53).

Рассмотрим теперь случай, когда $0 < k < 1$, например $k = \frac{1}{2}$, и построим график функции $y = kf(x)$ при $k = \frac{1}{2}$.

В этом случае нам придется расстояние каждой точки графика функции $y = f(x)$ от оси x уменьшить в 2 раза, т. е. умножить на $\frac{1}{2}$ ее ординату.

На рисунке 54 показано, как выполнено построение в этом случае. Точки A, B, C, D, E и F перешли в точки A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1.

Говорят, что график функции $y = kf(x)$ при $k > 1$ можно получить из графика функции $y = f(x)$ растяжением от оси x

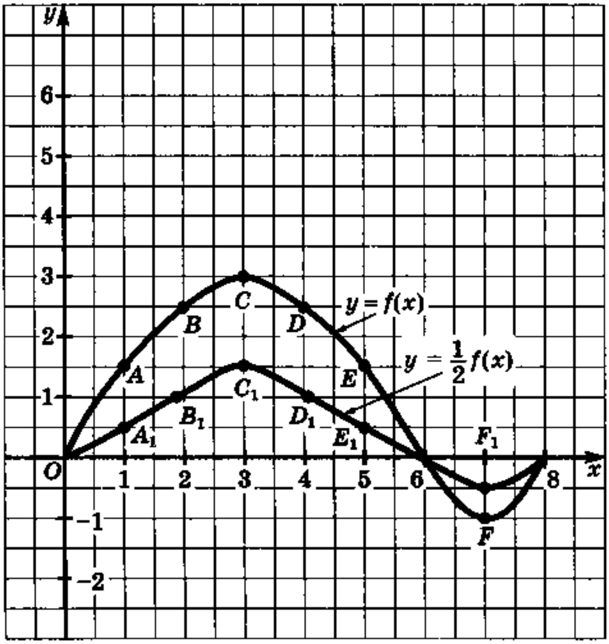


Рис. 54

исходного графика в k раз, а при $0 < k < 1$ — сжатием к оси x графика функции $y = f(x)$ в $\frac{1}{k}$ раз.

Наконец, рассмотрим случай, когда $k < 0$. Мы ограничимся значением $k = -1$, т. е. выясним, как можно построить график функции $y = -f(x)$, зная график функции $y = f(x)$.

При любом значении аргумента x значения этих функций являются противоположными числами. Значению $x = x_0$ соответствуют взаимно противоположные числа: $f(x_0)$ и $-f(x_0)$.

Значит, соответствующие точки графиков функций $y = f(x)$ и $y = -f(x)$ симметричны относительно оси x. Иначе говоря, **график функции $y = -f(x)$ можно получить из графика функции $y = f(x)$ с помощью симметрии относительно оси x.**

На рисунке 55 в одной и той же системе координат построены график функции $y = f(x)$ и график функции $y = -f(x)$.

Отсюда следует, что графики функций $y = kf(x)$ и $y = -kf(x)$ при любом $k \neq 0$ симметричны относительно оси x.

Значит, чтобы построить график функции $y = kf(x)$, где $k < 0$, можно сначала построить график функции $y = -kf(x)$, где $-k > 0$, а затем отобразить его симметрично относительно оси x.

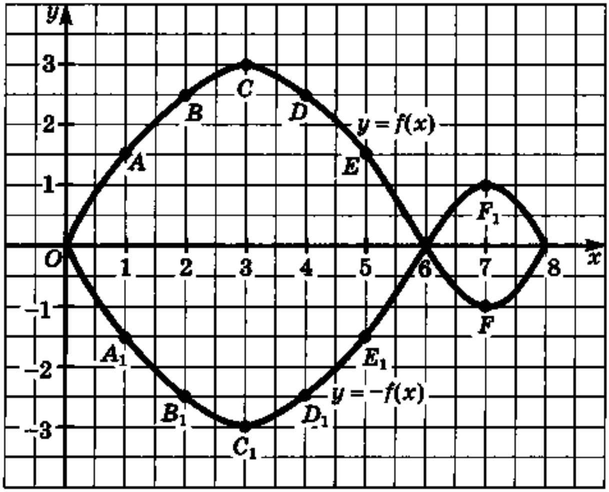


Рис. 55

1197. Функция g задана графиком (рис. 56). Область определения функции g — промежуток $[-5; 3]$. Постройте график функции:

а) $y = 2{,}5g(x)$; б) $y = \frac{1}{3}g(x)$.

1198. Постройте график функции $f(x) = 0{,}5x$. В этой же системе координат постройте график:

а) $y = 1{,}5f(x)$; б) $y = -1{,}5f(x)$.

1199. Изобразите схематически график функции:

а) $y = 2x^2$; в) $y = -x^2$; д) $y = 2x^{-1}$;

б) $y = \frac{1}{2}x^2$; г) $y = -\frac{1}{2}x^2$; е) $y = -x^{-2}$.

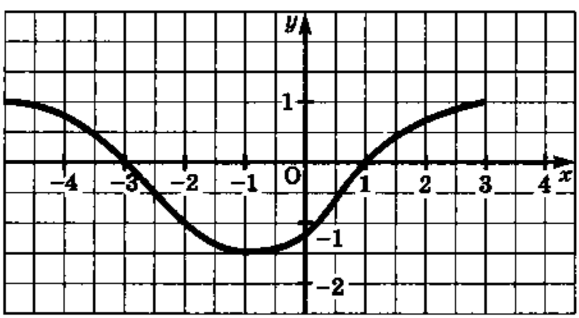


Рис. 56

1200. В одной системе координат постройте графики функций:

а) $y = |x|$ и $y = 2|x|$; в) $y = \sqrt{x}$ и $y = 0{,}5\sqrt{x}$;

б) $y = -|x|$ и $y = -0{,}5|x|$; г) $y = -\sqrt{x}$ и $y = -2\sqrt{x}$.

1201. Решите графически уравнение:

а) $2\sqrt{x} = x + 1$; в) $0{,}5|x| = 3 - x$;

б) $3 - x = -0{,}5\sqrt{x}$; г) $-|x| = x - 2$.

1202. Известно, что точка $A(a;\ b)$ принадлежит графику функции $y = f(x)$. Принадлежит ли точка $B(a;\ 0{,}2b)$ графику функции $y = \frac{1}{5}f(x)$?

Упражнения для повторения

1203. Найдите все целые значения аргумента, при которых функция $g(x) = \frac{2x+5}{x}$ принимает целые значения.

1204. Решите неравенство:

а) $2(3 - 2x) + 3(2 - x) \leqslant 40$;

б) $4(2 + 3x) + 3(7 - 4x) < 5$.

1205. Упростите выражение:

а) $\left(\frac{1}{7}a^m b^4\right)^{-2} \cdot 14a^8b^8$; б) $(2ab^{-3m})^{-3} \cdot \left(\frac{1}{2}a^{-3}\right)^{-1}$.

49. Параллельный перенос графиков функций

Выясним, как связаны между собой графики функций $y = f(x)$ и $y = f(x) + n$, где n — произвольное число. Рассуждения проведем для $n = 2$.

Покажем, что график функции $y = f(x) + 2$ можно получить из графика функции $y = f(x)$, выполнив параллельный перенос на 2 единицы в направлении оси y.

Очевидно, что при этом параллельном переносе всякая точка $M(x_0;\ y_0)$ координатной плоскости перейдет в точку $M_1(x_0;\ y_0 + 2)$ (рис. 57).

Если точка $M(x_0;\ y_0)$ принадлежит графику функции $y = f(x)$, то верно равенство $y_0 = f(x_0)$. Но тогда является верным и равенство

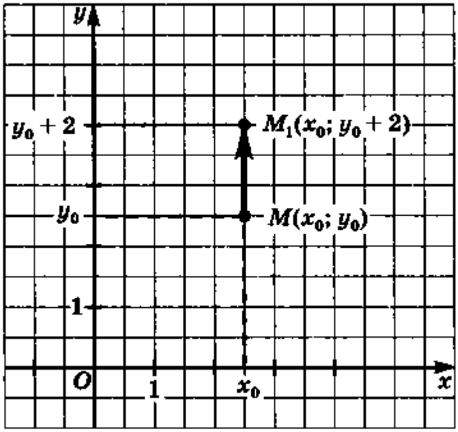


Рис. 57

$y_0 + 2 = f(x_0) + 2$. А это означает, что точка $M_1(x_0;\,y_0 + 2)$ принадлежит графику функции $y = f(x) + 2$.

Следовательно, при параллельном переносе на 2 единицы в направлении оси y каждая точка графика функции $y = f(x)$ переходит в точку графика функции $y = f(x) + 2$. При этом на графике функции $y = f(x) + 2$ не окажется «лишних» точек. В самом деле, если точка $K(x_1;\,y_1)$ принадлежит графику функции $y = f(x) + 2$, то верно равенство $y_1 = f(x_1) + 2$. Отсюда получается, что верным является также равенство $y_1 - 2 = f(x_1)$. А это означает, что точка $K(x_1;\,y_1 - 2)$ принадлежит графику функции $y = f(x)$. Таким образом, точка $K_1(x_1;\,y_1)$ является образом точки $K(x_1;\,y_1 - 2)$ при рассматриваемом параллельном переносе.

Рассуждение, которое мы провели для $n = 2$, сохраняет силу и для любого $n \neq 0$. Поэтому можно сделать вывод:

график функции $y = f(x) + n$ можно получить из графика функции $y = f(x)$ с помощью сдвига вдоль оси y на n единиц вверх, если $n > 0$, или на $|n|$ единиц вниз, если $n < 0$.

На рисунке 58 изображены графики функций $y = x^2$ и $y = x^2 - 4$. Парабола $y = x^2 - 4$ получена из параболы $y = x^2$ в результате сдвига ее на 4 единицы вниз.

Выясним теперь, как связаны между собой графики функций $y = f(x)$ и $y = f(x - m)$, где m — произвольное число.

Пусть $m = 3$. С помощью рассуждений, аналогичных тем, которые мы провели выше, можно показать, что график функции $y = f(x - 3)$ получается из графика функции $y = f(x)$ при параллельном переносе вдоль оси x на 3 единицы вправо. Это сле-

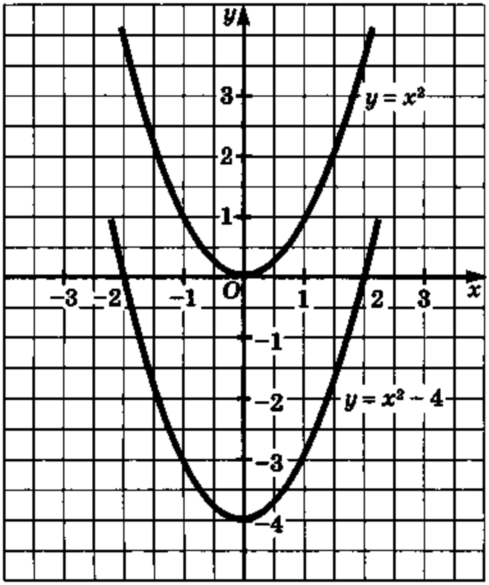


Рис. 58

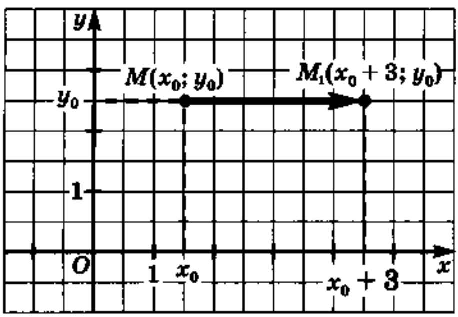


Рис. 59

дует из того, что при указанном параллельном переносе каждая точка $M(x_0; y_0)$ переходит в точку $M_1(x_0 + 3; y_0)$ (рис. 59).

Вообще *график функции $y = f(x - m)$ можно получить из графика функции $y = f(x)$ с помощью сдвига вдоль оси x на m единиц вправо, если $m > 0$, или на $|m|$ единиц влево, если $m < 0$.*

На рисунке 60 изображены графики функций $y = x^2$ и $y = (x + 2)^2$. Парабола $y = (x + 2)^2$ получена из параболы $y = x^2$ в результате ее сдвига на 2 единицы влево.

Из курса алгебры 7-го класса известно, что парабола — график функции $y = x^2$ — имеет ось симметрии, которой является

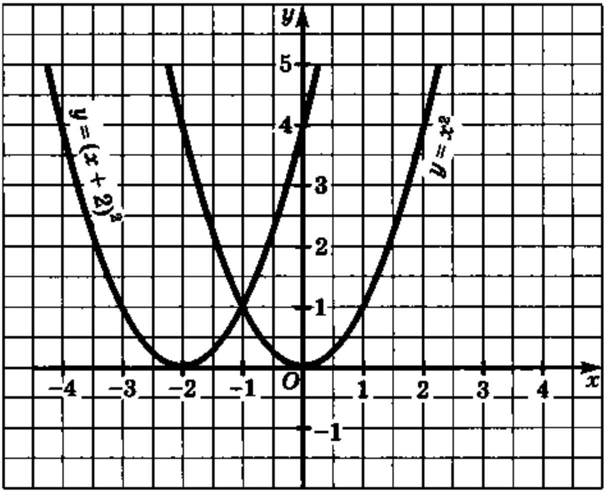


Рис. 60

ось y. Точку пересечения параболы с ее осью симметрии называют *вершиной параболы*. У параболы $y = x^2 + 2$ осью симметрии является та же ось y, а у параболы $y = (x - 3)^2$ — прямая $x = 3$.

Если выполнить последовательно два параллельных переноса: один в направлении оси y на 2 единицы вверх, а другой в направлении оси x на 3 единицы вправо, то получим параболу с вершиной в точке $A\,(3;\ 2)$ (рис. 61).

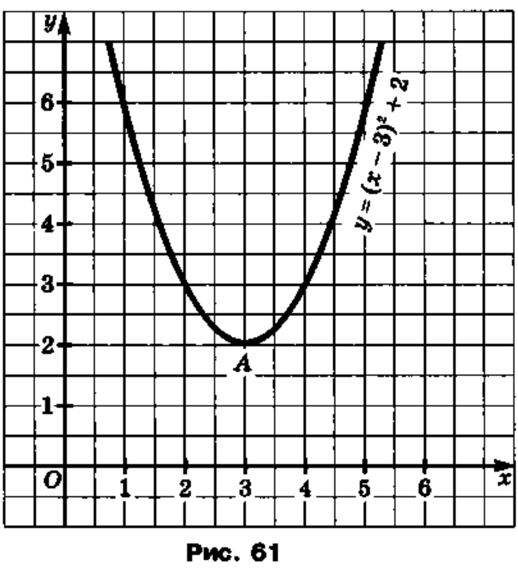


Рис. 61

График функции вида $y = (x - m)^2 + n$ есть парабола с вершиной в точке $A(m; n)$.

Из рассмотренных выше преобразований графиков можно сделать вывод, что *график функции $y = f(x - m) + n$ может быть получен из графика функции $y = f(x)$ в результате последовательно выполненных двух параллельных переносов: сдвига вдоль оси x на m единиц и сдвига графика функции $y = (x - m)^2$ вдоль оси y на n единиц.*

1206. Докажите, что если точка $B(x_0; y_0)$ принадлежит графику функции $y = f(x)$, то точка $B_1(x_0; y_0 + 5)$ принадлежит графику функции $y = f(x) + 5$.

1207. Докажите, что если точка $C(x_0; y_0)$ принадлежит графику функции $y = g(x)$, то точка $C_1(x_0 + 3; y_0)$ принадлежит графику функции $y = g(x - 3)$.

1208. График функции $y = g(x)$ — ломаная ABC, где $A(-4; -2)$, $B(2; 4)$, $C(4; 2)$. Постройте график функции $y = g(x)$ и график функции:

а) $y = g(x) + 2$; в) $y = g(x - 4)$;
б) $y = g(x) - 2$; г) $y = g(x + 1)$.

1209. Изобразите схематически график функции:

а) $y = x^2 + 1$; в) $y = (x - 2)^2$;
б) $y = x^2 - 1$; г) $y = (x + 1)^2$.

1210. Постройте график функции:

а) $y = |x|$; в) $y = |x| + 1$; д) $y = |x + 2| - 1$;
б) $y = |x| - 2$; г) $y = |x - 3|$; е) $y = |x - 1| + 1$.

1211. Изобразите схематически график функции; найдите нули функции и промежутки знакопостоянства:

а) $y = x^3 - 1$; в) $y = (x + 2)^3 - 1$;
б) $y = (x + 1)^3$; г) $y = (x - 3)^3 + 1$.

1212. Постройте график функции; найдите нули функции и промежутки знакопостоянства:

а) $y = -x^2 + 1$; в) $y = \frac{1}{2}|x - 3|$;

б) $y = -x^3 - 1$; г) $y = 2|x| - 3$.

1213. Изобразите схематически график функции и укажите, в каких координатных четвертях нет ни одной точки графика:

а) $y = \sqrt{x} + 12$; в) $y = \sqrt{x-4} + 2$;

б) $y = \sqrt{x-11}$; г) $y = \sqrt{x-5} + 8$.

1214. Изобразите схематически график функции и укажите область определения и область значений этой функции:

а) $y = \sqrt{x-8}$; в) $y = \sqrt{x-7} + 10$;

б) $y = \sqrt{x} + 6$; г) $y = \sqrt{x+4} + 2$.

1215. На рисунке 62 построены графики функций:

$y = \sqrt{x} + 3$; $y = \sqrt{x-2}$;

$y = \sqrt{x+2}$; $y = \sqrt{x+2} + 3$.

Для каждого графика укажите соответствующую формулу.

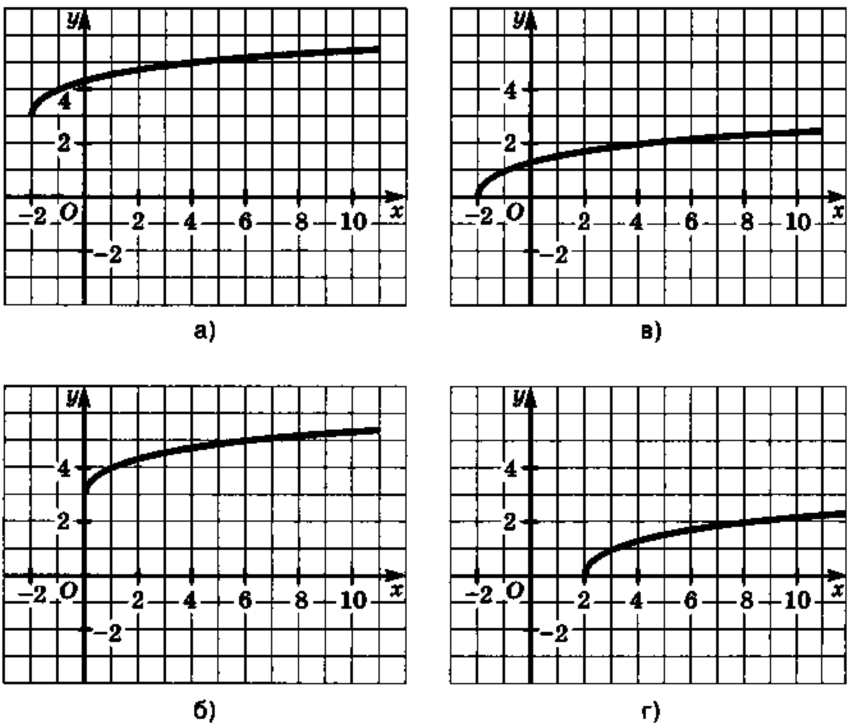


Рис. 62

1216. Постройте график функции $f(x) = -(x - 2)^2 + 4$ и найдите по графику:

а) $f(0)$, $f(1)$, $f(3)$;

б) значения x, при которых $f(x) = 3$, $f(x) = 0$, $f(x) = -5$;

в) промежутки, в которых $f(x) < 0$, $f(x) > 0$;

г) область значений функции f.

1217. Укажите координаты вершины параболы:

а) $y = (x - 10)^2 + 8$; в) $y = -(x - 4)^2 + 7$;

б) $y = (x + 9)^2 - 5$; г) $y = -(x + 7)^2 - 9$.

1218. Даны функции:

$f(x) = (x - 2)^2 - 1$, $g(x) = x - 1$, $\varphi(x) = -x + 3$.

Используя графики, решите уравнение:

а) $f(x) = g(x)$; б) $f(x) = \varphi(x)$; в) $g(x) = \varphi(x)$.

1219. Постройте график функции

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4, \text{ если } x \geqslant 0, \\ |x - 4|, \text{ если } x > 0. \end{cases}$$

Решите уравнение:

а) $f(x) = -5$; в) $f(x) = 3$; д) $f(x) = 6$.

б) $f(x) = 0$; г) $f(x) = 4$; е) $f(x) = -1$.

1220. Изобразите схематически график функции

$$g(x) = (x - 2)^3$$

и, пользуясь им, решите неравенство:

а) $g(x) < -1$; б) $g(x) \geqslant 0$; в) $g(x) > 1$.

1221. При каких значениях n график функции $y = x^2 + n$ пересекает ось x в точках, абсциссы которых равны:

а) -1 и 1; б) -2 и 2; в) -5 и 5?

1222. При каких значениях m график функции $y = (x - m)^2$ пересекает ось y в точке, ордината которой равна:

а) 1; б) 4; в) 9?

Упражнения для повторения

1223. Выясните, при каких целых значениях a, где $a < 10$, уравнение $(x + a - 2)^2 + (x - a + 2)^2 = 2a^2 + 8$ имеет целые корни. Найдите эти корни.

1224. Укажите все несократимые дроби со знаменателем 30, которые принадлежат промежутку $\left(\frac{1}{5}; \frac{2}{3}\right)$.

1225. Представьте в виде рациональной дроби выражение

$$\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{2y}+\frac{1}{x+2y}}{\frac{1}{2xy}+\frac{1}{2xy+4y^2}+\frac{1}{x^2+2xy}}-\frac{1}{\frac{2}{x}+\frac{1}{y}}.$$

1226. Укажите два последовательных целых числа, между которыми заключено значение выражения:

а) $2\cdot 3^{-2}-3\cdot\left(\frac{2}{7}\right)^{-1}$; б) $\left(\frac{2}{13}\right)^{-2}+8\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)^{-1}$.

Контрольные вопросы и задания

1. Что называют областью значений функции? Найдите $E(f)$ для функции $f(x) = x^2$, где $D(f) = [-1; 2]$.

2. Как из графика функции $y = f(x)$ можно получить график функции $y = kf(x)$ в случае, когда:

а) $k > 1$; б) $0 < k < 1$; в) $k < 0$?

3. Как, зная график функции $y = f(x)$, можно построить график функции:

а) $y = f(x) + n$; б) $y = f(x - m)$; в) $y = f(x - m) + n$?

§ 17. ДРОБНО-ЛИНЕЙНАЯ ФУНКЦИЯ

50. Функции $y = x^{-1}$ и $y = x^{-2}$ и их графики

В курсе алгебры 7-го класса вы познакомились со степенной функцией, т. е. функцией, задаваемой формулой вида $y = x^n$, где n — натуральное число.

В этом параграфе мы рассмотрим примеры степенных функций с целым отрицательным показателем.

Отметим сразу, что область определения любой функции, заданной формулой вида $y = x^n$, где n — целое отрицательное число, есть множество всех чисел, отличных от нуля. Это вытекает из того, что выражение x^n, где $n \in Z$ и $n < 0$, имеет смысл при любых x, кроме нуля.

Сначала рассмотрим степенную функцию $y = x^{-1}$. Выясним некоторые ее свойства и особенности графика.

1. ***При любом положительном значении x функция принимает положительное значение, а при любом отрицательном значении x — отрицательное значение.***

Действительно, если $x > 0$, то $x^{-1} > 0$; если $x < 0$, то $x^{-1} < 0$. Значит, график функции расположен в первой и третьей координатных четвертях. Заметим, что так как функция при $x = 0$ не определена, то на оси y нет ни одной точки, принадлежащей графику этой функции, т. е. график не пересекает ось y. Значит, график функции состоит из двух отдельных частей.

2. *Любым противоположным значениям аргумента соответствуют противоположные значения функции.*

Например, если $x = 3$, то $y = \frac{1}{3}$, если $x = -3$, то $y = -\frac{1}{3}$.

Вообще, если $x = a$, то $y = a^{-1}$, если $x = -a$, то $y = (-a)^{-1}$. Значит, если $a \neq 0$, то каждой точке $\left(a; \frac{1}{a}\right)$ соответствует точка $\left(-a; -\frac{1}{a}\right)$, симметричная относительно начала координат, и наоборот. Иначе говоря, точки графика, имеющие противоположные абсциссы, расположены симметрично относительно начала координат, т. е. график функции $y = x^{-1}$ симметричен относительно начала координат.

Прежде чем сформулировать третье свойство, рассмотрим некоторые закономерности поведения функции при возрастании и убывании аргумента x и введем необходимые обозначения.

Пусть значения аргумента x, оставаясь положительными, неограниченно возрастают, например x принимает значения: 1, 2, 5, 100, 1000 и т. д. Тогда соответствующими значениями функции $y = x^{-1}$ являются числа: 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ и т. д., т. е. значения y приближаются к нулю. В таких случаях пишут: если $x > 0$ и $x \to +\infty$ (читают: «икс стремится к плюс бесконечности»), то $y \to 0$ («игрек стремится к нулю»).

Пусть значения аргумента x, оставаясь положительными, неограниченно убывают, например x принимает значения: 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ и т. д. Тогда соответствующими значениями функции $y = x^{-1}$ являются числа: 1, 2, 10, 100, 1000 и т. д. Это можно записать так: если $x > 0$ и $x \to 0$, то $y \to +\infty$.

Аналогично обстоит дело, когда $x < 0$.

Если значения x, оставаясь отрицательными, неограниченно убывают, т. е. если $x < 0$ и $x \to -\infty$ (читают: «икс стремится к минус бесконечности»), то $y \to 0$.

Если $x < 0$ и $x \to 0$, то $y \to -\infty$.

Например: если $x = -1, -2, -5, -100, -1000$ и т. д., то $y = -1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{100}, -\frac{1}{1000}$ и т. д.

Если $x = -1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{100}, -\frac{1}{1000}$ и т. д., то $y = -1, -2, -5, -100, -1000$ и т. д.

Таким образом, мы установили еще одно свойство функции $y = x^{-1}$:

3. ***Если $x > 0$ и $x \to +\infty$, то $y \to 0$; если $x > 0$ и $x \to 0$, то $y \to +\infty$. Если $x < 0$ и $x \to -\infty$, то $y \to 0$; если $x < 0$ и $x \to 0$, то $y \to -\infty$.***

Из этого свойства вытекает, что точки графика, удаляясь от оси y вправо или влево, неограниченно приближаются к оси x, а удаляясь от оси x вверх или вниз, неограниченно приближаются к оси y.

Теперь построим график функции $y = x^{-1}$.

Учитывая свойство 2, составим таблицу лишь для положительных значений аргумента (точки графика с отрицательными абсциссами симметричны относительно начала координат точкам графика с противоположными положительными абсциссами):

Отметим на координатной плоскости точки, координаты которых помещены в таблице, и точки с противоположными координатами (рис. 63).

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4
y	4	3	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$

Учитывая свойства функции, проведем через отмеченные точки в первой и третьей координатных четвертях плавные линии.

Получим график функции $y = x^{-1}$ (рис. 64). Кривую такого вида называют *гиперболой*. Она состоит из двух ветвей.

Ось x и ось y, к которым как угодно близко приближаются точки гиперболы при удалении их в бесконечность, называют *асимптотами* гиперболы.

Вообще асимптотой кривой называется прямая, к которой приближаются как угодно близко точки кривой при удалении их в бесконечность.

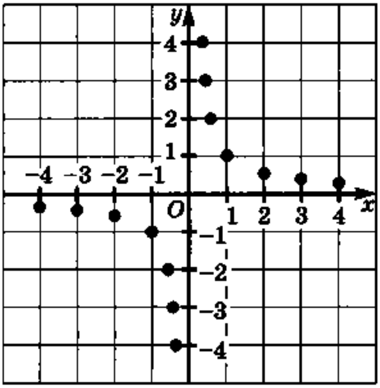


Рис. 63

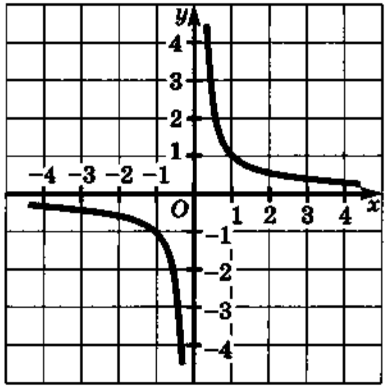


Рис. 64

Термин *асимптота* происходит от греческого слова *asymptotos,* что означает *не сливающаяся.*

Выясним теперь свойства функции $y = x^{-2}$ и особенности ее графика.

1. ***При любом, отличном от нуля, значении аргумента функция принимает положительные значения.***

Это следует из того, что если $x \neq 0$, то $x^2 > 0$ и потому $x^{-2} > 0$.

Значит, все точки графика функции расположены выше оси x.

2. ***Любым противоположным значениям аргумента соответствует одно и то же значение функции.***

Действительно, при любом x, отличном от нуля,

$$x^{-2} = (-x)^{-2}, \text{ так как } x^{-2} = \frac{1}{x^2} \text{ и } (-x)^{-2} = \frac{1}{(-x)^2} = \frac{1}{x^2}.$$

Следовательно, точки графика с противоположными абсциссами симметричны относительно оси y, т. е. график функции симметричен относительно оси y.

3. ***Если $x \to +\infty$ или $x \to -\infty$, то $y \to 0$; если $x \to 0$ (будучи положительным или отрицательным), то $y \to +\infty$.***

Действительно, если $|x|$ неограниченно возрастает, то $|x^{-2}|$ неограниченно убывает, оставаясь положительным числом, т. е. $x^{-2} \to 0$. Если $|x|$ неограниченно убывает, т. е. $|x| \to 0$, то x^{-2} неограниченно возрастает, т. е. $x^{-2} \to +\infty$.

Геометрически это означает, что ось x и ось y являются асимптотами графика функции.

Теперь построим график функции $y = x^{-2}$.

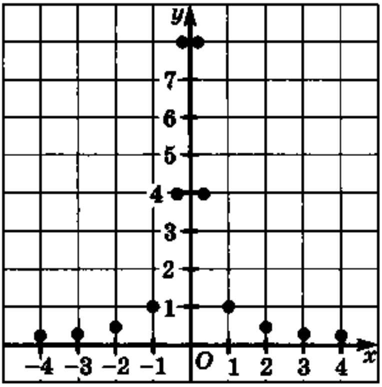


Рис. 65

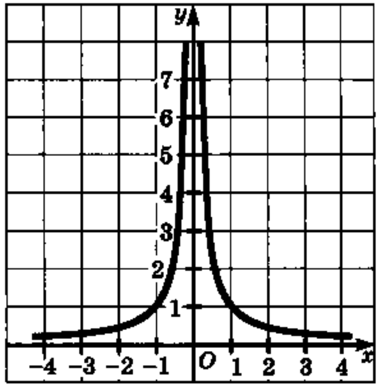


Рис. 66

Составим таблицу лишь для положительных значений аргумента, учитывая, что по свойству 2 при противоположных значениях x функция принимает одинаковые значения:

x	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3
y	9	4	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$

Отметим на координатной плоскости точки, координаты которых занесены в таблицу, и точки с противоположными абсциссами (рис. 65). Через отмеченные точки проведем в первой и во второй координатных четвертях плавные линии. Получим график функции $y = x^{-2}$ (рис. 66).

Заметим, что функция $y = x^n$ при нечетном отрицательном n (т. е. при $n = -3$; -5 и т. д.) обладает такими же свойствами, как и функция $y = x^{-1}$, а при четном отрицательном n (т. е. при $n = -4$; -6 и т. д.) — такими же свойствами, как функция $y = x^{-2}$. График функции $y = x^n$, где n — целое отрицательное число, состоит из двух ветвей; при нечетном n он расположен в первой и третьей координатных четвертях, а при четном n — в первой и второй координатных четвертях. Ось x и ось y являются асимптотами для графика этой функции.

1227. Постройте график функции $y = x^{-1}$, где $x > 0$. Используя свойства графика функции и вычисления, найдите:

а) значение y при $x = 0{,}1$; $0{,}2$; 6; 20;

б) значение x, при котором $y = 0{,}01$; $0{,}4$; 8; 20;

в) множество значений аргумента x, при которых

$y < 0{,}1$; $y < 0{,}01$; $y < 0{,}001$; $y > 20$; $y > 100$.

1228. Сравните числа:

а) $0{,}57^{-1}$ и $0{,}75^{-1}$; в) $2{,}38^{-1}$ и $2{,}19^{-1}$;

б) $0{,}92^{-1}$ и 1; г) $1{,}047^{-1}$ и 1.

1229. Принадлежит ли графику функции $y = x^{-1}$ точка:

а) $A\left(3;\ \frac{1}{3}\right)$; в) $C(25;\ 0{,}04)$;

б) $B\left(-\frac{1}{7};\ -7\right)$; г) $D(-0{,}5;\ 2)$?

1230. Постройте в одной системе координат графики функций $y = x$ и $y = x^{-1}$. Ответьте на вопросы:

а) при каких положительных значениях аргумента верны равенство $x^{-1} = x$ и неравенства $x^{-1} < x$, $x^{-1} > x$;

б) при каких отрицательных значениях аргумента верны равенство $x^{-1} = x$ и неравенства $x^{-1} < x$, $x^{-1} > x$?

1231. Докажите, что если точка $A\ (a;\ b)$ принадлежит графику функции $y = x^{-1}$, то точка $B\ (b;\ a)$ также принадлежит графику этой функции.

1232. Постройте график функции

$$y = \begin{cases} x^{-1}, \text{ если } 0 < x \leqslant 1. \\ x, \text{ если } x > 1. \end{cases}$$

Найдите:

а) значение функции при $x = 0{,}25;\ 0{,}5;\ 1;\ 2;\ 6$;

б) значения аргумента x, при которых $y = 1{,}5;\ 3;\ 4$.

1233. Постройте график функции:

$$g(x) = \begin{cases} x^{-1}, \text{ если } x \geqslant \frac{1}{2}, \\ x + 1{,}5, \text{ если } x < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Найдите:

а) $g(-2)$, $g(0)$, $g\left(\frac{1}{2}\right)$, $g(1)$, $g(-2{,}5)$;

б) значения x, при которых $g(x) = 0$; $g(x) = -2$; $g(x) = 0{,}5$.

1234. Используя график функции $y = x^{-2}$ (см. рис. 66), найдите:

а) значение y при $x = 0{,}6$; $-0{,}6$; $1{,}2$; $-1{,}2$;

б) значения x, при которых $y = 0{,}7$; 1; 3;

в) множество значений аргумента x, при которых $y < 1$; $y > 1$.

1235. Сравните числа:

а) $0{,}85^{-2}$ и $0{,}63^{-2}$;
в) $(-0{,}365)^{-2}$ и $(0{,}365)^{2}$;
б) $5{,}71^{-2}$ и $6{,}23^{-2}$;
г) $(-1{,}25)^{-2}$ и $(2{,}25)^{-2}$.

1236. Принадлежит ли графику функции $y = x^{-2}$ точка:

а) $K\left(8;\ \dfrac{1}{64}\right)$;
в) $P\left(-\dfrac{1}{3};\ 9\right)$;
б) $L\left(-2;\ -\dfrac{1}{4}\right)$;
г) $Q(-0{,}5;\ 4)$?

1237. Постройте в одной системе координат графики функций $y = x^{-1}$ и $y = x^{-2}$, где $x > 0$. Пользуясь графиками, сравните:

а) $0{,}375^{-2}$ и $0{,}375^{-1}$;
б) $2{,}45^{-2}$ и $2{,}45^{-1}$.

1238. Расположите в порядке возрастания числа:

$5{,}7^{-3}$; $6{,}8^{-3}$; $5{,}7^{-1}$; $5{,}7^{5}$; $6{,}8^{5}$; $6{,}8^{-1}$.

1239. Постройте график функции

$$y = \begin{cases} x^{-2}, \text{ если } x \geqslant \dfrac{1}{2}; \\ 4, \text{ если } -\dfrac{1}{2} < x < \dfrac{1}{2}; \\ x^{-2}, \text{ если } x \leqslant -\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Найдите:

а) значение функции при $x = -\dfrac{1}{3}$; 0; $\dfrac{1}{4}$; -1; 2;

б) значения аргумента, при которых $y = \dfrac{1}{4}$; 1; 4.

Упражнения для повторения

1240. Запишите в стандартном виде число и укажите значащую часть и порядок числа:

а) 230 000; б) 40 900; в) 0,000285; г) 0,00705.

1241. В одной системе координат постройте графики функций $y = x$, $y = x^2$, $y = x^3$, где $x \geqslant 0$. Пользуясь графиками, расположите в порядке возрастания числа:

а) 0,75; $0{,}75^2$; 075^3; б) $1{,}32^2$; 1,32; $1{,}32^3$.

1242. Докажите, что при любых допустимых значениях переменных a и b значение дроби не зависит от значений этих переменных:

а) $\dfrac{10(a-b)^2}{(5a-5b)^2}$; б) $\dfrac{(2x-3y)^2+24xy}{(x+1{,}5y)^2}$.

1243. Найдите значение дроби $\dfrac{4x^2+6xy+9y^2}{8x^3-27y^3}$, зная, что $x - 1{,}5y = 50$.

51. Обратная пропорциональность и ее график

Вы знаете, что прямая пропорциональность — это функция, которую можно задать формулой $y = kx$, где k — не равное нулю число.

При положительных значениях аргумента и $k > 0$ эта функция обладает свойством: при увеличении значений x в несколько раз соответствующие значения y увеличиваются во столько же раз. В таких случаях говорят, что значения x *прямо пропорциональны* соответствующим значениям y, а переменная *y пропорциональна x.*

Рассмотрим функцию $y = k \cdot \dfrac{1}{x}$ при $k > 0$, где независимая переменная x принимает положительные значения.

Согласно формуле $y = k \cdot \dfrac{1}{x}$ значения y прямо пропорциональны числам, обратным значениям x. Это значит, что с увеличением значений x в несколько раз соответствующие значения y уменьшаются во столько же раз.

В таких случаях говорят, что переменная *y обратно пропорциональна* переменной x, а саму функцию называют *обратной пропорциональностью*.

Так же как и прямая пропорциональность, обратная пропорциональность находит широкое применение на практике.

Например,

— время, затраченное на прохождение одного и того же пути, обратно пропорционально скорости движения;

— количество товара обратно пропорционально цене этого товара при одной и той же сумме денег, затраченных на его покупку;

— длина a (в сантиметрах) стороны прямоугольника обратно пропорциональна его ширине b (в сантиметрах) при постоянной площади S (в см^2) прямоугольника.

В дальнейшем функцию $y = \frac{k}{x}$ мы будем рассматривать при любом $k \neq 0$ и любых положительных и отрицательных значениях аргумента.

Определение. **Обратной пропорциональностью называется функция, которую можно задать формулой $y = \frac{k}{x}$, где x — независимая переменная и k — не равное нулю число.**

Число k называют *коэффициентом* обратной пропорциональности.

Областью определения функции, заданной формулой $y = \frac{k}{x}$, является множество действительных чисел, отличных от нуля, так как выражение $\frac{k}{x}$ имеет смысл при любых x, где $x \neq 0$.

Теперь выясним, что представляет собой график обратной пропорциональности.

Вам известно, что графиком функции $y = x^{-1}$, т. е. функции $y = \frac{1}{x}$, является гипербола, и вы знаете, как можно построить график функции $y = kf(x)$, если известен график функции $y = f(x)$. Опираясь на эти сведения, легко построить график любой функции $y = \frac{k}{x}$, зная график функции $y = \frac{1}{x}$.

При $k > 0$ график функции $y = \frac{k}{x}$ получается из графика функции $y = \frac{1}{x}$ путем его растяжения от оси x в k раз, если $k > 1$, и его сжатия к оси x в $\frac{1}{k}$ раз, если $0 < k < 1$.

При $k < 0$ график функции $y = \frac{k}{x}$ получается из графика функции $y = \frac{-k}{x}$ (здесь $-k$ — положительное число) в результате симметрии относительно оси x.

График функции $y = \frac{1}{x}$ — гипербола. График функции $y = \frac{k}{x}$ также называют *гиперболой*.

Область определения функции $y = \frac{k}{x}$ — множество действительных чисел, кроме числа 0.

Перечислим сначала свойства функции $y = \frac{k}{x}$, где $k > 0$, и отметим особенности ее графика.

1. ***При любых положительных значениях x функция принимает положительные значения. При любых отрицательных значениях x — отрицательные значения.***

Из этого свойства следует, что график функции расположен в первой и в третьей координатных четвертях. График состоит из двух отдельных ветвей.

2. ***Любым противоположным значениям аргумента соответствуют противоположные значения функции.***

Значит, точки графика, имеющие противоположные абсциссы, расположены симметрично относительно начала координат, т. е. график функции симметричен относительно начала координат.

3. ***Если $x > 0$ и $x \to +\infty$, то $y \to 0$; если $x > 0$ и $x \to 0$, то $y \to +\infty$. Если $x < 0$ и $x \to -\infty$, то $y \to 0$; если $x < 0$ и $x \to 0$, то $y \to -\infty$.***

Из этого следует, что ось x и ось y являются асимптотами гиперболы.

4. ***Область значений функции есть множество действительных чисел, исключая число 0.***

В качестве примера функции $y = \frac{k}{x}$, где $k > 0$, построим график функции $y = \frac{6}{x}$.

Перечисленные выше свойства показывают, каким должен быть вид графика функции $y = \frac{k}{x}$, где $k > 0$.

Для построения конкретного графика (при $k = 6$) следует вычислить координаты нескольких точек графика, построить их и через них провести плавные линии (в первой и в третьей координатных четвертях).

Составим таблицу для некоторых положительных значений аргумента:

x	1	2	3	4	5	6
y	6	3	2	1,5	1,2	1

Отметим на координатной плоскости точки, координаты которых записаны в таблице, и точки с противоположными координатами, т. е. точки (−1; −6), (−2; −3), (−3; −2), (−4; −1,5), (−5; −1,2), (−6; −1).

Через них проведем ветви гиперболы. Получим график функции $y = \frac{6}{x}$ (рис. 67).

Перечислим теперь свойства функции $y = \frac{k}{x}$, где $k < 0$, и отметим особенности ее графика.

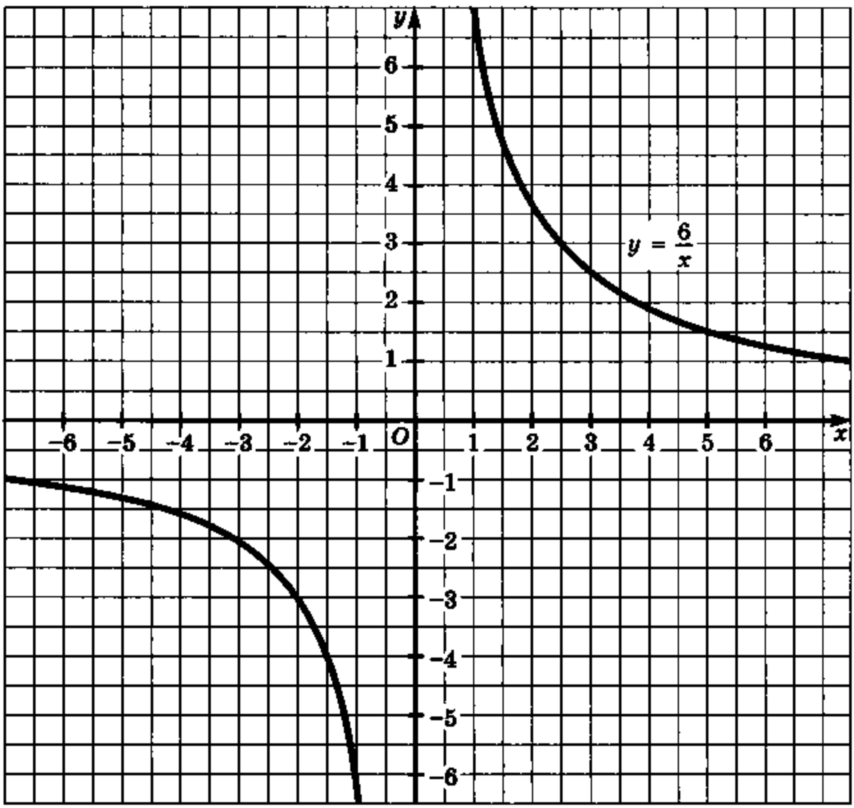


Рис. 67

1. ***При любых положительных значениях x функция принимает отрицательные значения. При любых отрицательных значениях x функция принимает положительные значения.***

График функции расположен в четвертой и второй координатных четвертях и состоит из двух отдельных ветвей.

2. ***Любым противоположным значениям аргумента соответствуют противоположные значения функции.***

График функции симметричен относительно начала координат.

3. ***Если $x > 0$ и $x \to +\infty$, то $y \to 0$; если $x > 0$ и $x \to 0$, то $y \to -\infty$. Если $x < 0$ и $x \to -\infty$, то $y \to 0$; если $x < 0$ и $x \to 0$, то $y \to +\infty$.***

Отсюда следует, что ось x и ось y являются асимптотами гиперболы.

4. ***Область значений функции есть множество действительных чисел, отличных от нуля.***

В качестве примера функции $y = \frac{k}{x}$, где $k < 0$, построим график функции $y = -\frac{12}{x}$.

Составим таблицу для некоторых отрицательных значений аргумента.

x	-12	-6	-4	-3	-2	-1
y	1	2	3	4	6	12

Отметим на координатной плоскости точки, координаты которых записаны в таблице, и точки с противоположными координатами: (12; −1), (6; −2), (4; −3), (3; −4), (2; −6), (1; −12). Через эти точки проведем ветви гиперболы. Получим график функции $y = -\frac{12}{x}$ (рис. 68).

1244. Используя график функции $y = \frac{6}{x}$ (см. рис. 57), найдите:

а) значение y, соответствующее значению x, равному 1,5; 2,5; −1,5; −4,5;

б) значение x, которому соответствует значение y, равное 2,5; 5; −1,5; −4;

в) промежутки, в которых $y > 0$ и в которых $y < 0$.

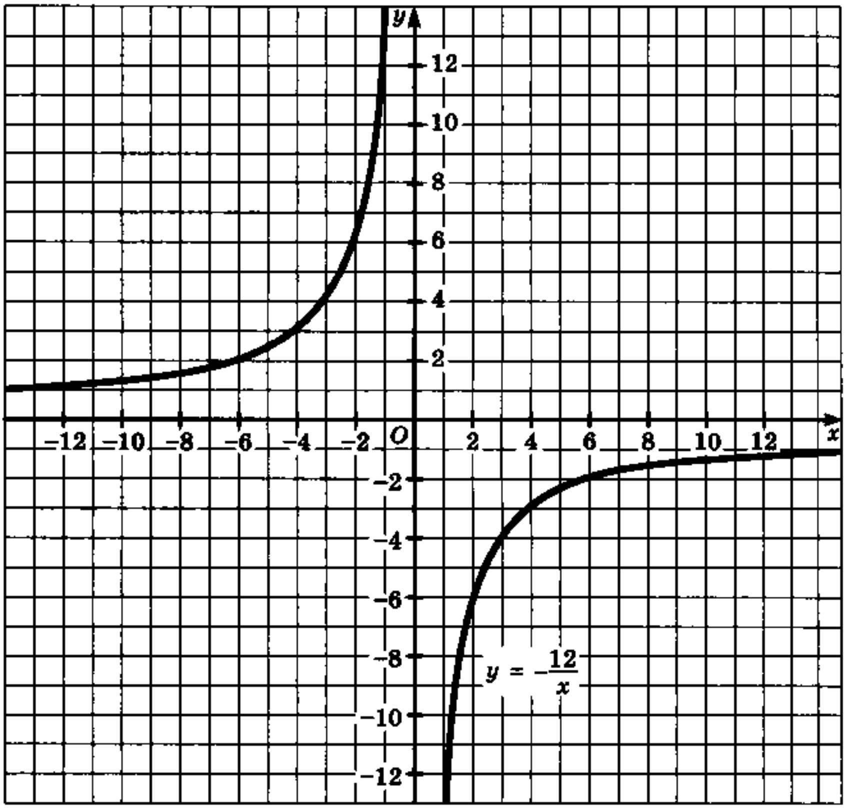


Рис. 68

1245. Используя график функции $y = -\frac{12}{x}$ (см. рис. 58), найдите:

а) значение y, соответствующее значению x, равному 1,5; 8; −1,5; −2,5;

б) значение x, которому соответствует значение y, равное 2,5; 8; −4,5; −2,5;

в) промежутки, в которых $y > 0$ и в которых $y < 0$.

1246. Постройте график функции $f(x) = \frac{4}{x}$. Найдите:

а) $f(2{,}5)$; $f(5)$; $f(-1{,}2)$; $f(-5)$;

б) значение аргумента x, при котором $f(x) = 6$; $f(x) = -2{,}5$.

1247. Принадлежит ли графику функции $y = \dfrac{10}{x}$ точка:

а) $A\,(20;\ 0{,}5)$; в) $C\,(-4;\ 2{,}5)$;

б) $B\left(-30;\ -\dfrac{1}{3}\right)$; г) $D\,(25;\ 0{,}4)$?

1248. Функция задана формулой $g(x) = \dfrac{200}{x}$. Найдите расстояние точки M, принадлежащей графику функции g:

а) от оси x, если абсцисса точки M равна 10; −100; 200; −4000; 10 000;

б) от оси y, если ордината точки M равна 5; 80; −400; 20 000; −100 000.

1249. Найдите коэффициент k обратной пропорциональности, зная, что ее графику принадлежит точка:

а) $A(3{,}5;\ 8)$; б) $B(-4{,}5;\ -4)$; в) $C(0{,}0016;\ -625)$.

1250. Задайте формулой обратную пропорциональность, если известно, что ее график проходит через точку:

а) $K(3;\ 4)$; в) $P(-3{,}5;\ 2)$;

б) $L(-2{,}5;\ -2)$; г) $Q\left(6\dfrac{1}{4};\ -4\right)$.

1251. Расстояние между городами 4000 км самолет, двигаясь со скоростью v км/ч, пролетает за t ч. Выразите формулой зависимость:

а) t от v; б) v от t.

1252. Площадь прямоугольного треугольника равна 2,5 см^2. Один его катет равен x см, другой y см. Выразите формулой зависимость y от x. Постройте график этой зависимости.

1253. На рисунке 69 построен график функции, выражающей зависимость времени движения автомобиля, которое он затрачивает на путь от A до B, от его скорости. Используя график, ответьте на вопросы:

1. Каково расстояние от A до B?
2. Сколько времени потребуется автомобилисту на путь от A до B, если он будет двигаться со скоростью 30 км/ч; 60 км/ч; 120 км/ч?
3. С какой скоростью надо двигаться автомобилю, чтобы проехать путь от A до B за 2 ч; за 1,5 ч; за 2 ч 24 мин?

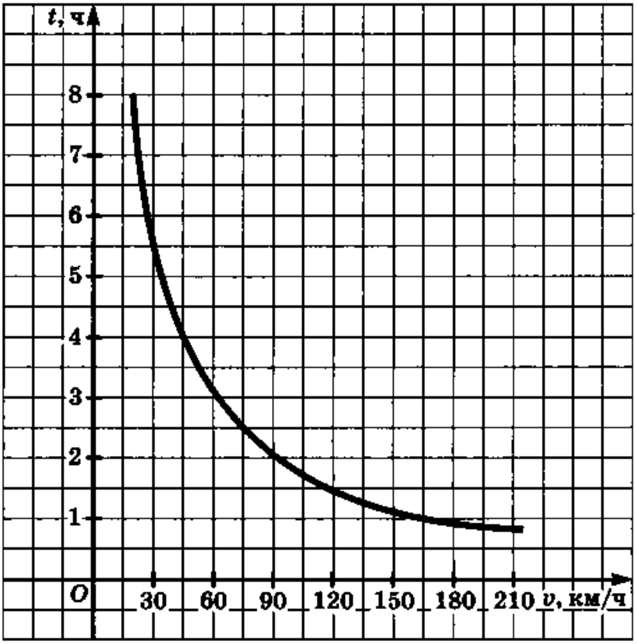


Рис. 69

1254. Постройте график функции:

а) $y = \dfrac{6}{x-2}$; в) $y = -\dfrac{4}{x+1}$;

б) $y = \dfrac{6}{x} - 1$; г) $y = 3 - \dfrac{4}{x}$.

Упражнения для повторения

1255. Известно, что $f(x) = x^2 + 1$. Найдите:

а) $f(0) + f(1) + f(-1)$; б) $f(2) + 2f(3) + 3f(4)$.

1256. Выделив из дроби $\dfrac{x^2 + 2x - 4}{x + 1}$ целую часть, найдите все целые значения этой дроби.

1257. Изобразите схематически график функции:

а) $y = \dfrac{1}{2}(x - 2)^3$; б) $y = -x^3 + 1$.

1258. Упростите выражение

$$\left(\frac{m+1}{m-1} - \frac{m-1}{m+1}\right) : \left(\frac{m^2+1}{m^2-1} - \frac{m^2-1}{m^2+1}\right).$$

52. Дробно-линейная функция и ее график

Рассмотрим функции, заданные формулами $y = \frac{3x-5}{2x+4}$, $y = \frac{8}{5x-6}$, $y = \frac{7x-1}{10x}$. Правые части этих формул имеют вид рациональной дроби, у которой числитель — двучлен первой степени или число, отличное от нуля, а знаменатель — двучлен первой степени.

Из функций такого вида исключим функции, у которых правая часть — сократимая дробь, как, например, у функции $y = \frac{6x-12}{2x-4}$. Тогда получим семейство функций, которое называют *дробно-линейными функциями*.

Определение. **Функция, которую можно задать формулой вида $y = \frac{ax+b}{cx+d}$, где буквой x обозначена независимая переменная, а буквами a, b, c и d — произвольные числа, причем $c \neq 0$ и $ad - bc \neq 0$, называется дробно-линейной функцией.**

Ограничение, что $c \neq 0$ и $ad - bc \neq 0$, существенно. Если $c = 0$, то мы получаем линейную функцию, а при $ad - bc = 0$ — сократимую дробь, значение которой равно $\frac{b}{d}$, т. е. константу. Действительно, выразив коэффициент c из равенства $ad - bc = 0$ через a, b и d, найдем, что $c = \frac{ad}{b}$. Подставив значение c в формулу $y = \frac{ax+b}{cx+d}$, получим:

$$\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{ax+b}{\frac{ad}{b}x+d} = \frac{(ax+b)b}{d(ax+b)} = \frac{b}{d}.$$

Покажем, что графиком дробно-линейной функции является гипербола.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Построим график функции $y = \frac{x+4}{x-2}$.

Выделим из дроби $\frac{x+4}{x-2}$ целую часть. Имеем:

$$\frac{x+4}{x-2} = \frac{x-2+6}{x-2} = \frac{x-2}{x-2} + \frac{6}{x-2} = 1 + \frac{6}{x-2}.$$

График функции $y = \frac{6}{x-2} + 1$ можно получить из графика функции $y = \frac{6}{x}$ с помощью двух параллельных переносов: сдвига на 2 единицы вправо вдоль оси x и сдвига на 1 вверх в направлении оси y. При этих сдвигах переместятся асимптоты гиперболы $y = \frac{6}{x}$: прямая $x = 0$ (т. е. ось y) — на 2 единицы вправо, а прямая $y = 0$ (т. е. ось x) — на 1 единицу вверх.

Прежде чем строить график, проведем на координатной плоскости пунктиром асимптоты: прямые $x = 2$ и $y = 1$.

Учитывая, что гипербола состоит из двух ветвей, для построения каждой из них составим две таблицы: одну для $x > 2$, а другую для $x < 2$.

x	1	0	−1	−2	−4	−10
y	−5	−2	−1	−0,5	0	0,5

x	3	4	5	6	8	12
y	7	4	3	2,5	2	1,6

Отметим в координатной плоскости точки, координаты которых записаны в первой таблице, и соединим их плавной непрерывной линией. Получим одну ветвь гиперболы. Аналогично, воспользовавшись второй таблицей, получим вторую ветвь гиперболы. При построении нужно учитывать свойства функции $y = \frac{6}{x}$ (график функции $y = \frac{6}{x-2} + 1$ должен выглядеть так же, как и график функции $y = \frac{6}{x}$, если бы осями

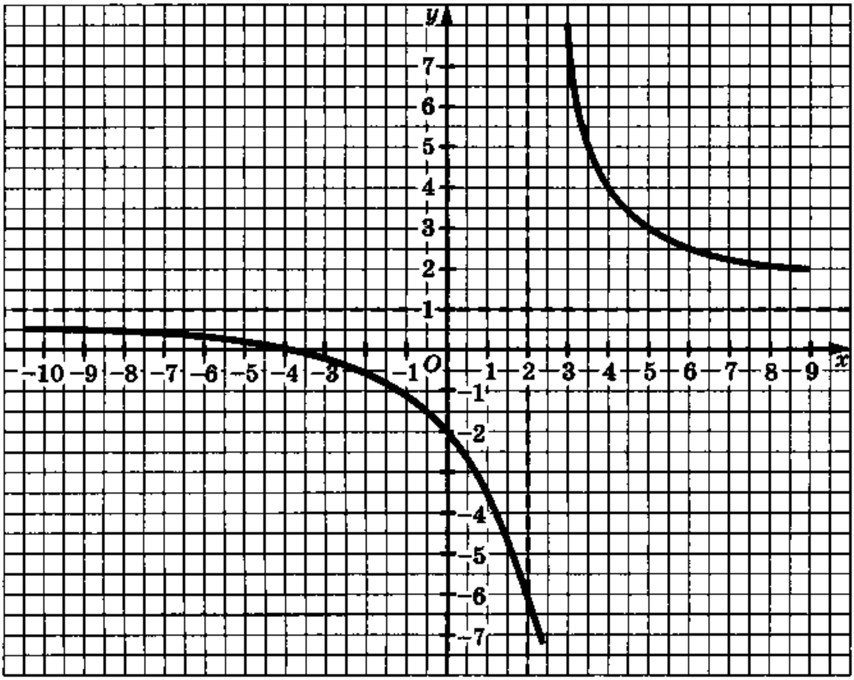


Рис. 70

координат были бы прямые $x = 2$ и $y = 1$). График функции $y = \frac{x+4}{x-2}$ изображен на рисунке 70.

Пример 2. Построим график функции $y = -\frac{2x+10}{x+3}$.

Выделим из дроби $\frac{2x+10}{x+3}$ целую часть. Получим:

$$\frac{2x+10}{x+3} = \frac{2(x+3)+4}{x+3} = 2 + \frac{4}{x+3}.$$

Отсюда $y = -\frac{4}{x+3} - 2$.

Заметим, что выделение целой части из дроби $\frac{2x+10}{x+3}$ можно выполнить иначе. Разделим двучлен $2x + 10$ на двучлен $x + 3$:

$$\begin{array}{r|l} -\,2x + 10 & x + 3 \\ \cline{2-2} \underline{2x + 6} & 2 \\ 4 & \end{array}$$

Значит, $\dfrac{2x + 10}{x + 3} = 2 + \dfrac{4}{x + 3}$. Следовательно, $y = -\dfrac{4}{x + 3} - 2$.

График функции $y = -\dfrac{4}{x + 3} - 2$ можно получить из графика функции $y = -\dfrac{4}{x}$ с помощью двух параллельных переносов: сдвига на 3 единицы влево и сдвига на 2 едииицы вниз.

Асимптоты гиперболы — прямые $x = -3$ и $y = -2$.

Составим две таблицы для $x < -3$ и для $x > -3$.

x	-2	-1	1	2	7
y	-6	-4	-3	$-2{,}8$	$-2{,}4$

x	-4	-5	-7	-8	-11
y	2	0	-1	$-1{,}2$	$-1{,}5$

Построив точки в координатной плоскости и проведя через них ветви гиперболы, получим график функции $y = -\dfrac{2x + 10}{x + 3}$ (рис. 71).

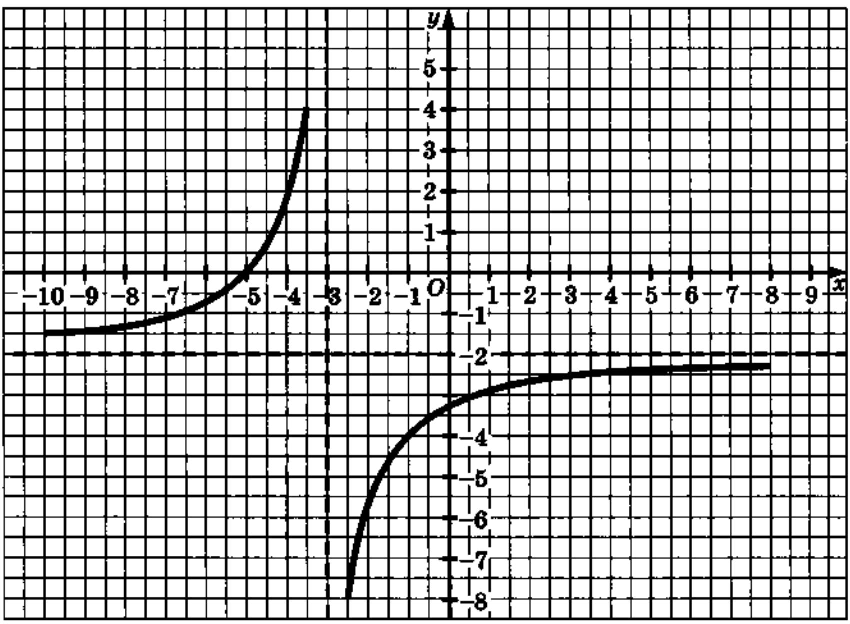


Рис. 71

Докажем теперь, что графиком любой дробно-линейной функции является гипербола, которая получается из графика функции $y = \frac{k}{x}$ с помощью параллельных переносов вдоль осей координат. Для этого нужно показать, что формулу $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ можно представить в виде $y = \frac{k}{x-m} + n$, где k, m и n — произвольные числа, причем $k \neq 0$.

Выделим из дроби $\frac{ax+b}{cx+d}$ целую часть, учитывая, что $c \neq 0$ и $ad - bc \neq 0$. Для этого разделим двучлен $ax + b$ на двучлен $cx + d$:

$$\begin{array}{r|l} -\;ax + b & cx + d \\ \cline{2-2} ax + \dfrac{ad}{c} & \dfrac{a}{c} \\ \cline{1-1} b - \dfrac{ad}{c} & \end{array}$$

Значит, $\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c} + \frac{b - \frac{ad}{c}}{cx+d}$. Разделив обе части второй дроби на c, получим $\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c} + \frac{\frac{bc-ad}{c^2}}{x - \left(-\frac{d}{c}\right)}$.

Пусть $\frac{a}{c} = n$, $\frac{bc-ad}{c^2} = k$ и $-\frac{d}{c} = m$. Тогда

$$\frac{ax+b}{cx+d} = n + \frac{k}{x-m}.$$

Значит, произвольную дробно-линейную функцию можно задать формулой $y = \frac{k}{x-m} + n$, где $k \neq 0$.

Ранее было показано, что график функции $y = f(x - m) + n$ можно получить из графика функции $y = f(x)$ с помощью двух параллельных переносов: сдвига вдоль оси x на m единиц вправо, если $m > 0$, или на $|m|$ единиц влево, если $m < 0$, и сдвига вдоль оси y на n единиц вверх, если $n > 0$, или на $|n|$ единиц вниз, если $n < 0$. Следовательно, график функции $y = \frac{k}{x-m} + n$ можно получить из графика функции $y = \frac{k}{x}$ с помощью двух соответствующих параллельных переносов.

График функции $y = \frac{k}{x}$ — гипербола, значит, и график функции $y = \frac{k}{x-m} + n$ также является гиперболой, для которой прямые $x = m$ и $y = n$ являются асимптотами.

Так как $m = -\frac{d}{c}$ и $n = \frac{a}{c}$, то для гиперболы $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ асимптотами являются прямые:

$$x = -\frac{d}{c} \text{ и } y = \frac{a}{c}.$$

При построении конкретного графика дробно-линейной функции нужно формулу $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ представить в виде $y = \frac{k}{x-m} + n$. При этом к такому виду можно приводить дробь $\frac{ax+b}{cx+d}$ как путем выделения из нее целой части (как это было показано в примерах 1 и 2), так и с помощью формул: $k = \frac{bc-ad}{c^2}$, $m = -\frac{d}{c}$ и $n = \frac{a}{c}$. Первый способ в большинстве случаев является предпочтительней.

1259. Постройте график функции:

а) $y = \frac{6}{x-3} + 2$; в) $y = \frac{-8}{x-2} + 1$;

б) $y = \frac{-6}{x+3} - 2$; г) $y = \frac{-8}{x+2} - 1$.

1260. Найдите область определения и область значений функции f, если:

а) $f(x) = \dfrac{9}{x-5} + 2$; б) $f(x) = \dfrac{17}{x+6} - 4$.

1261. Укажите асимптоты гиперболы — графика функции:

а) $y = \dfrac{19}{x-7} - 4$; в) $y = -\dfrac{6}{x-4} + 9$; д) $y = \dfrac{x-5}{3x+6}$;

б) $y = \dfrac{21}{x+8} + 5$; г) $y = -\dfrac{12}{x+6} - 10$; е) $y = \dfrac{2x+1}{8x-1}$.

1262. Докажите, что графиком функции g является прямая с «исключенной точкой», и найдите координаты этой точки, если:

а) $g(x) = \dfrac{8x-40}{3x-15}$; б) $g(x) = -\dfrac{6x+42}{12x+84}$.

1263. Постройте график функции:

а) $y = \dfrac{3x-2}{x-2}$; б) $y = -\dfrac{2x}{x-3}$.

Найдите нули функции и промежутки, в которых $y < 0$ и $y > 0$.

1264. Докажите, что графиком функции

$$y = \frac{3x^3 + 6x}{x^3 - 9x^2 + 2x - 18}$$

является гипербола.

1265. Постройте график функции

$$g(x) = \begin{cases} -\dfrac{2x-8}{x+2}, \text{ если } 0 \leqslant x \leqslant 4, \\ x - 4, \text{ если } 4 < x \leqslant 7. \end{cases}$$

Решите уравнение:

а) $g(x) = 4$; б) $g(x) = 3$; в) $g(x) = 1$; г) $g(x) = 0$.

1266. Решите графически уравнение:

а) $3 - \dfrac{6}{2-x} = x^2$; б) $\sqrt{2+x} = -1 - \dfrac{2}{x}$.

1267. Найдите все точки графика функции $y = \dfrac{8x-1}{x-1}$ с целыми координатами.

1268. Докажите, что графиком функции $y = \dfrac{2x^2 - 8x}{x^2 - 7x + 12}$ является гипербола с «исключенной точкой». Найдите координаты этой точки.

1269. Укажите, графиком какой из функций является гипербола:

$$y = \frac{5}{x+4},\quad y = \frac{2x-7}{3},\quad y = \frac{x^2-25}{x+5},$$

$$y = \frac{7x}{x+8},\quad y = \frac{9x-24}{9x-27},$$

$$y = (2x+5)(3x-9)^{-1}.$$

Упражнения для повторения

1270. Упростите выражение:

а) $\dfrac{a^2b^{-2} - a^{-2}b^2}{a^{-2} + b^{-2}}$; б) $\dfrac{x^4y^{-2} - x^{-2}y^4}{x^2y^{-2} + x^{-2}y^2 + 1}$.

1271. Докажите, что при любых значениях переменных верно неравенство:

а) $x^2 + y^2 + 2 \geqslant 2(x + y)$;

б) $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 2(ac + bc - ab)$.

1272. Найдите область определения и область значений функции:

а) $f(x) = \dfrac{x^4 - 81}{x^2 - 9}$; б) $g(x) = \dfrac{x^2 - 25}{x + 5}$.

1273. График функции $y = \dfrac{k}{x}$ проходит через точку $(-2; 4)$. Найдите значение k и постройте этот график.

Контрольные вопросы и задания

1. Сформулируйте свойства функций $y = x^{-1}$ и $y = x^{-2}$ и отметьте особенности их графиков.

2. Что называется асимптотой кривой?

3. Какая функция называется обратной пропорциональностью?

4. Начертите схематически график функции $y = \frac{k}{x}$ при $k > 0$ и перечислите свойства этой функции.

5. Начертите схематически график функции $y = \frac{k}{x}$ при $k < 0$ и перечислите свойства этой функции.

6. Какая функция называется дробно-линейной функцией? Приведите примеры таких функций.

7. Как строят графики дробно-линейных функций?

Дополнительные упражнения к главе 7

К параграфу 16

1274. Зная, что $f(x) = x^3 + x + 2$, найдите:

а) $f(3) + f(1)$; в) $f(-3) + f(3)$;

б) $f(-3) + f(2)$; г) $f(a) + f(-a)$, где $a \in R$.

1275. Функция $g(x) = x^2 - x - 6$ задана на множестве целых чисел, принадлежащих промежутку $[-3; 4]$.

Найдите область значения функции.

1276. Известно, что $\varphi(x) = 2x - 5$. При каких значениях x верно равенство:

а) $\varphi(x + 3) = \varphi(3x)$; в) $2\varphi(x) = -\varphi(x - 1)$;

б) $\varphi(-x) = \varphi(4x + 1)$; г) $3\varphi(x - 1) = 4\varphi(x + 2)$?

1277. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} x+4, \text{ если } -6 \leqslant x < -1, \\ -x+2, \text{ если } -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ x, \text{ если } 1 < x \leqslant 5. \end{cases}$$

Найдите:

а) область определения функции $D(f)$;

б) значение функции $f(-5)$, $f(1)$, $f(4)$;

в) область значений функции $E(f)$;

г) значения аргумента x, при которых $f(x) = 0$, $f(x) = 2$, $f(x) = 3$, $f(x) = 4$.

1278. Функция задана формулой $g(x) = \frac{1}{2}x - \frac{|x|}{x}$.

Найдите:

а) область определения функции $D(g)$;

б) значения функции $g(-4)$, $g(-1)$, $g(2)$, $g(4)$;

в) область значений функции $E(g)$;

г) значения аргумента x, при которых $g(x) = -6$, $g(x) = 0$, $g(x) = 1$, $g(x) = 6$.

1279. Известно, что $f(x) = 0{,}5x - 1$. Постройте график функции:

а) $y = 2f(x)$; б) $y = -f(x)$; в) $y = -\frac{1}{2}f(x)$.

1280. Графиком функции $y = f(x)$ служит ломаная линия $ABCD$, где $A(-4; -2)$, $B(-1; 4)$, $C(2; 1)$, $D(6; 3)$. Постройте график функции:

а) $y = f(x)$; в) $y = \frac{1}{2}f(x)$; д) $y = 2f(x)$;

б) $y = -f(x)$; г) $y = -\frac{1}{2}f(x)$; е) $y = -2f(x)$.

1281. Изобразите схематически график функции:

а) $y = x^2 - 4x + 5$; в) $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$;

б) $y = x^2 + 6x + 5$; г) $y = x^3 + 6x^2 + 12x + 5$.

1282. Постройте график функции:

а) $y = -2|x - 1|$; б) $y = -|x - 3| + 1$.

Найдите нули функции и промежутки знакопостоянства.

1283. Задайте одной формулой функцию:

а) $y = \begin{cases} 8 - x, \text{ если } x \leqslant 8, \\ x - 8, \text{ если } x > 8; \end{cases}$ в) $y = \begin{cases} -x - 5, \text{ если } x \leqslant 0, \\ x - 5, \text{ если } x > 0; \end{cases}$

б) $y = \begin{cases} 8 - x, \text{ если } x < 1, \\ x + 6, \text{ если } x \geqslant 1; \end{cases}$ г) $y = \begin{cases} -x - 5, \text{ если } x \leqslant -3, \\ x + 1, \text{ если } x > -3. \end{cases}$

1284. Найдите значение a, при котором точка $K(-3; 4)$ принадлежит графику функции:

а) $y = (x + a)^2 - 12$; б) $y = |x - a| + 3$.

1285. Известно, что точка $A(6; 13)$ принадлежит как графику функции $y = (x - 5)^2 + n$, так и графику функции $y = (x - m)^2 - 3$. Найдите числа m и n.

1286. Постройте график функции $y = \dfrac{12}{x}$ и найдите координаты точек пересечения (если они существуют) графика этой функции с прямой:

а) $y = 6$; б) $y = 3x$; в) $y = -x + 7$; г) $y = -2x$.

1287. Найдите значения коэффициентов k и b, при которых прямая $y = kx + b$ и гипербола $y = \dfrac{k}{x}$ имеют общую точку:

а) $A(2; 3)$; б) $B(-3; 6)$.

1288. Докажите, что гипербола $y = \dfrac{9}{x}$ и прямая $y = -x + 6$ имеют только одну общую точку, и найдите ее координаты.

1289. Докажите, что если точка $A(a; b)$ принадлежит гиперболе $y = \dfrac{k}{x}$, то и точка $B(b; a)$ принадлежит этой же гиперболе. Как расположены точки A и B относительно прямой $y = x$?

1290. Напишите уравнение какой-нибудь прямой, которая с гиперболой $y = \dfrac{6}{x}$:

а) имеет только одну общую точку;
б) имеет только две общие точки;
в) не имеет общих точек.

1291. Могут ли гипербола $y = \dfrac{k}{x}$ и прямая $y = ax + b$ иметь три общие точки?

1292. Постройте график функции:

а) $y = -|x|^{-1}$; б) $y = \dfrac{6}{|x|}$; в) $y = -\dfrac{4}{|x|}$.

1293. Функция задана формулой $f(x) = \dfrac{6}{|x-2|}$.

а) Найдите $f(-4)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(3)$.
б) Докажите, что если $a \neq 2$, то $f(a + 2) = f(2 - a)$.
в) Найдите область значений функции.

1294. Укажите, в каких координатных углах нет ни одной точки графика функции:

$$y = \sqrt{x+16} + 2; \quad y = \sqrt{x-7} + 1; \quad y = \sqrt{x-6} - 6.$$

1295. Изобразите схематически график функции:

а) $y = \sqrt{x-4} + 2$; б) $y = \sqrt{x+6} + 1$.

Укажите область определения и область значений функции.

1296. Докажите, что графики функций $y = \sqrt{x-5}$ и $y = x^2 + 5$, где $x \geqslant 0$, симметричны относительно прямой $y = x$.

1297. При каком значении a график функции $y = \sqrt{x-6}$ симметричен относительно прямой $y = x$ графику функции $y = x^2 + a$, где $x \geqslant 0$?

1298. Постройте график функции $y = \sqrt{x-1} + 4$. Пользуясь графиком, укажите множество значений x, при которых $y > 6$.

К параграфу 17

1299. Постройте в первой координатной четверти графики функций $y = x^n$, где $n \in \boldsymbol{Z}$ и $-2 \leqslant n \leqslant 2$, выбрав за единицу масштаба на осях x и y 5 см (10 клеточек).

Как располагаются абсциссы точек пересечения прямой $y = a$ с графиками этих функций в случае:

а) $0 < a < 1$; б) $a = 1$; в) $a > 1$?

1300. Постройте график функции:

$$y = \begin{cases} x^{-2}, \text{ если } 1 < |x| < 3, \\ x^2, \text{ если } -1 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

1301. Изобразите схематически график функции $y = x^{-3}$. Пользуясь графиком, сравните значения функции:

а) при $x = 2$ и $x = 3$; б) при $x = -3$ и $x = -4$.

1302. Изобразите схематически график функции $f(x) = x^{-4}$. Пользуясь графиком, сравните значения функции:

а) при $x = 3$ и $x = 2$; б) при $x = -3$ и $x = -2$.

1303. Точка M принадлежит графику функции $y = x^n$, где n — целое число. Найдите n, если:

а) $M(3;\ 9)$; в) $M\left(-\frac{1}{2};\ -2\right)$; д) $M(-3;\ 81)$;

б) $M(-2;\ -8)$; г) $M\left(-2;\ \frac{1}{16}\right)$; е) $M\left(-\frac{1}{2};\ -32\right)$.

1304. Найдите область определения и постройте график функции, если:

а) $y = \frac{6x^2 - 24}{x^3 - 4x}$; б) $y = \frac{x^2 + 12x + 32}{x^2 - 16}$.

1305. Докажите, что при любом $x > 8$ функция $y = \frac{2x-4}{x-8}$ принимает значения, большие 2, а при $x < 8$ — значения, меньшие 2.

1306. Докажите, что при любом b, большем 8, или b, меньшем 8, прямая $y = -x + b$ пересекает график функции $y = \frac{16}{x}$ в двух точках.

1307. Найдите все точки графика функции $y = \frac{9x - 29}{x - 4}$ с целыми координатами.

1308. Докажите, что существует только одна точка, координаты которой — натуральные числа, принадлежащая графику функции $y = \frac{6{,}5 - 2x}{0{,}5x - 1}$.

1309. Постройте графики функций $y = \frac{6}{x}$ и $y = \frac{7x - 43}{x - 7}$ и найдите координаты общих точек этих графиков функций.

1310. Гипербола, асимптоты которой — прямые $x = 5$ и $y = 5$, пересекает гиперболу $y = \frac{4}{x}$ в двух точках. Абсцисса одной из точек пересечения равна 4. Найдите координаты общих точек этих гипербол.

Задачи повышенной трудности

1311. Сократите дробь:

а) $\dfrac{x^4-x^2+1}{x^6+x^4+1}$; в) $\dfrac{a^5+a^4+a^3+a^2+a+1}{a^6+2a^3+1}$;

б) $\dfrac{y^2-1}{y^3-3y+2}$; г) $\dfrac{b^7-b^6+b-1}{b^3-b^2+b-1}$.

1312. Упростите выражение:

а) $\dfrac{(a^2-b^2-c^2-2bc)(a+b-c)}{(a+b+c)(a^2-b^2+c^2+2ac)}$;

б) $\dfrac{a^3+b^3+c^3-3abc}{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca}$;

в) $\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}+\dfrac{1}{(x+2)(x+3)}+\dfrac{1}{(x+3)(x+4)}+\ldots+$

$+\dfrac{1}{(x+n-1)(x+n)}+\dfrac{1}{(x+n)(x+n+1)}$;

г) $\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)\left(\dfrac{1}{a+b}\cdot\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\right)+\dfrac{2}{(a+b)^2}\cdot\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)\right)$;

д) $\dfrac{\dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2}\cdot\dfrac{x^2-y^2}{x^3+y^3}\cdot\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}\right)}{\dfrac{(x+y)^2-xy}{(x-y)^2+xy}\cdot\left(\dfrac{1}{y^2}-\dfrac{1}{x^2}\right)}$;

е) $\left(1+\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{x-1}}}\right)\cdot\dfrac{x^3-(x-1)^2}{x^2+2}$.

1313. Четырехзначное число, в котором цифра единиц равна разности между цифрами тысяч и сотен, а цифра десятков равна нулю, является квадратом числа. Найдите это число.

1314. Докажите, что при любом целом n значение трехчлена $2n^3-3n^2+n$ кратно 6.

1315. Двузначное число таково, что произведение цифр этого числа является его делителем. Найдите все такие числа.

1316. Докажите, что если $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$, то верно равенство

$$(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) = (ax + by + cz)^2.$$

1317. Докажите тождество:

$$\frac{a_2}{a_1(a_1 + a_2)} + \frac{a_3}{(a_1 + a_2)(a_1 + a_2 + a_3)} + \cdots$$

$$\ldots + \frac{a_n}{(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1})(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)} = \frac{a_2 + a_3 + \cdots + a_n}{a_1(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)}.$$

1318. Докажите, что при $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ верно неравенство

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant \sqrt{abc}\,(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}).$$

1319. Докажите, если $n \in N$, то верно неравенство:

а) $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$; б) $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} < 2$.

1320. Решите неравенство $x^2 + 5y^2 - 4xy - 6y + 9 \geqslant 0$.

1321. Докажите, что при любом натуральном n, отличном от 2, значение дроби $\frac{n^3 - 3n - 2}{n^2 - n - 2}$ является натуральным числом.

1322. Натуральные степени числа 3 записаны в виде последовательности $3^1, 3^2, 3^3, \ldots, 3^n, \ldots$.

Какой цифрой оканчивается число в этой последовательности, стоящее на:

а) 4-м месте; в) 12-м месте; д) 6-м месте;
б) 8-м месте; г) 2-м месте; е) 10-м месте?

1323. Выполните подстановку $x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a} + \sqrt{\frac{1}{a}}\right)$ и упростите выражение $\frac{2\sqrt{x^2 - 1}}{x - \sqrt{x^2 - 1}}$.

1324. Упростите выражение $\dfrac{2b\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}-x}$, замените x выражением $x=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}}-\sqrt{\dfrac{b}{a}}\right)$, где $a > 0$ и $b > 0$.

1325. Упростите выражение:

а) $\sqrt{6+2\sqrt{6}-2\sqrt{3}-2\sqrt{2}}$; б) $\sqrt{8-2\sqrt{2}-2\sqrt{5}+2\sqrt{10}}$.

1326. Сравните значение выражений:

а) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ и $\sqrt{1{,}05}$;

б) $\sqrt{9+4\sqrt{2}+4\sqrt{3}+2\sqrt{6}}$ и $\sqrt{9+2\sqrt{3}+2\sqrt{5}+2\sqrt{15}}$.

1327. Докажите тождество

$$\sqrt{\frac{x^2+2xy+9y^2}{x-2\sqrt{xy}+3y}-2y}=\sqrt{x}+\sqrt{y}.$$

1328. Упростите выражение

$$\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}.$$

1329. Решите уравнение:

а) $(x^2-3x+4)^2-5x(x-3)-14=0$;

б) $(x^2+6x)(x^2+6x+8)=105$;

в) $(x^2-8x+7)(x^2-8x+15)=-15$;

г) $x(x+1)(x+2)(x+3)=24$.

1330. Докажите, что если между коэффициентами уравнений $x^2+px+q=0$ и $x^2+p_1x+q_1=0$ имеет место соотношение $pp_1=2(q+q_1)$, то по крайней мере одно из уравнений имеет корни.

1331. Найдите значение a, при котором сумма квадратов корней уравнения $x^2-ax+a-1=0$ будет наименьшей.

1332. Найдите такое значение a, при котором один из корней уравнения $x^2-\dfrac{15}{4}x+a^3=0$ является квадратом другого. Найдите эти корни.

1333. Найдите значения параметра m, при которых уравнения $x^2 - (2m + 1)x + m + 1 = 0$ и $2x^2 - (4m - 1)x + 1 = 0$ имеют хотя бы один общий корень. Найдите этот корень.

1334. Решите уравнение:

а) $|2x| + x = 6$; б) $|x + 1| + |x - 1| = 2$.

1335. При каких значениях k решением системы

$$\begin{cases} x + ky = 3, \\ kx + 4y = 6 \end{cases}$$

является пара чисел, в которой $x > 1$ и $y > 0$?

1336. Прямая $y = x + 2$ пересекает параболу $y = x^2 - 3x + 2$ в двух точках A и B. Найдите на дуге AB параболы точку, наиболее удаленную от прямой AB.

1337. Постройте график уравнения $y = |x^2 - 4|$ и решите уравнение:

а) $|x^2 - 4| = 6$; в) $|x^2 - 4| = 2$;

б) $|x^2 - 4| = 4$; г) $|x^2 - 4| = 0$.

1338. Докажите, что при любом натуральном n, большем 1, выражение $7^{2n} - 4^{2n} - 297$ делится на 264.

1339. Докажите, что при всех допустимых значениях x верно неравенство

$$-3 \leqslant \frac{|x|}{x} + \frac{|x-1|}{x-1} + \frac{|x-2|}{x-2} \leqslant 3.$$

1340. Докажите, что при $n \in N$ верно неравенство:

а) $\frac{1}{\sqrt{n}} < \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$;

б) $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n}} < \sqrt{n+1} + \sqrt{n} - 1$.

1341. Докажите, что если $a + b = 1$, то $a^4 + b^4 \geqslant \frac{1}{8}$.

1342. Докажите, что число $\underbrace{111\ldots1}_{2n} - \underbrace{222\ldots2}_{n}$ является квадратом натурального числа.

1343. Функция задана формулой

$$f(x)=\sqrt{x^2-4}.$$

Докажите, что если $a>1$, то $f\left(a+\frac{1}{a}\right)=a-\frac{1}{a}$.

1344. Область определения функции f — множество Z, а область значений — множество $\{-1;\ 1\}$. Функция обладает свойством: для любых целых a и b верно равенство $f(a+b)=f(a)\cdot f(b)$. Найдите $f(0)$ и соотношение между $f(-x)$ и $f(x)$.

1345. Область определения функции g — множество Z и $g(1)=k$, где $k\in Z$. Функция обладает свойством: $g(a+b)=g(a)+g(b)$ для любых целых a и b. Найдите $g(0)$ и соотношение между $g(-x)$ и $g(x)$. Задайте функцию g формулой.

1346. Трое рабочих, работая совместно, могут выполнить заказ за 42 минуты. Первый из них, работая один, может выполнить работу вдвое медленнее второго и на 2 часа скорее третьего. За сколько времени может выполнить заказ каждый из них, работая отдельно?

1347. Из пунктов A и B выехали одновременно навстречу друг другу два велосипедиста и встретились в 18 км от пункта B. Прибыв в пункты A и B, они сразу же повернули назад и встретились вновь на расстоянии 24 км от A. Найдите расстояние от A до B.

1348. Две женщины привезли на рынок 210 кг яблок разных сортов. Продав яблоки по разной цене, обе выручили одинаковые суммы денег. Если бы первая продала столько же яблок, сколько и вторая, то она получила бы n рублей; если бы вторая продала столько же яблок, сколько первая, то она получила бы $4n$ рублей. Сколько килограммов яблок было у каждой женщины?

1349. С какой средней скоростью прошел автомобиль весь путь, если:

а) одну половину пути он прошел со скоростью v_1 км/ч, а другую — со скоростью v_2 км/ч;

б) третью часть пути он прошел со скоростью v_1 км/ч, а оставшуюся часть пути — со скоростью v_2 км/ч?

1350. Трехзначное число оканчивается цифрой 8. Если эту цифру перенести на первое место, то получившееся число будет на 80 больше утроенного данного числа. Найдите первоначальное трехзначное число.

1351. Четырехзначное число является квадратом натурального числа, и у него цифры тысяч и десятков одинаковы, а цифра сотен на единицу больше цифры единиц. Найдите данное четырехзначное число.

1352. Докажите, что графиком уравнения является пара пересекающихся прямых:

а) $xy + 3x - 5y - 15 = 0$;

б) $y^2 + xy + 3 = 3x + 4y$.

1353. Докажите, что графиком уравнения является пара параллельных прямых:

а) $(y - 3)(y + 2) = 0$;
б) $x^2 - 7x + 12 = 0$;
в) $(x - 1)(x + 2) = 0$;
г) $y^2 + 2y - 15 = 0$.

1354. Постройте график уравнения:

а) $xy - 2x = 0$;
б) $(x + y)(y - 3) = 0$;
в) $x^2 - 9 = 0$;
г) $y^2 - 4 = 0$;
д) $(x - 2y)^2 + (y - 3)^2 = 0$;
е) $(x^2 - y^2)^2 + (x^2 - 16)^2 = 0$.

ОТВЕТЫ

Глава 1

2. г) $\frac{1}{3}$; д) $\frac{x}{5}$; е) $\frac{17y}{7}$. 6. д) $6\frac{7}{13}$; е) $-1\frac{42}{79}$. 7. а) $\{x|x = \frac{1}{2k},\ k \in N,\ k \leqslant 10\}$; б) $\{x|x = \frac{1}{3k},\ k \in N,\ k \leqslant 6\}$; в) $\{x|x = \frac{1}{2k+1},\ k \in N,\ k \leqslant 9\}$; г) $\{x|x = \frac{1}{3k+1},\ k \in N,\ k \leqslant 6\}$. 9. $t = \frac{24}{v-2}$; а) $\frac{2}{3}$ ч; б) 1,5 ч. 10. $p = \frac{100b}{a}$; а) 20%; б) 6%. 11. б) При $x \neq 2$ и $x \neq 7$; г) при $x \neq -2$, $x \neq 0$, $x \neq 2$. 12. а) $\{y|y \neq -1,\ y \neq 1\}$; б) $\{y|y \neq -5,\ y \neq 0,\ y \neq 5\}$; г) $\{y|y \neq -3,\ y \neq 1\}$; е) $\{y|y \neq -1{,}5,\ y \neq -0{,}5,\ y \neq 0{,}5\}$. 13. а) Все числа; б) $x \neq 0{,}5$, $x \neq -0{,}5$; в) $x \neq y$, $x \neq -y$; г) $x \neq 0$, $y \neq 0$. 14. $x \neq 0$, $x \neq 1$; б) $x \neq 1$; в) все числа; г) $x \neq -1$, $x \neq 0{,}5$. 16. а) $\{1; 2; 3; 6\}$; б) $\{-5; -1; 1; 5\}$; в) $\{6; 8; 14\}$; г) $\{-19; -3; -1; 15\}$. 17. а) При $m \in \{-4; -1; 0; 3\}$; б) при $m \in \{0; 1; 2\}$; в) при $m = -1$; г) при $m \in \{0; 1\}$. 18. д) При $y = -2$; е) при $y = 3$. 19. а) При $x \in \{2; 2\}$; б) при $x = 2$; в) при $x = 1$; г) таких значений нет. 22. г) $(y-3)(2x-3y)$; д) $(a+2)(a-2)(a^2+4)$; е) $(7-b)^2(7+b)^2$. 23. а) $(x-5)^2$; в) $(4a+1)(1-2a)$; г) $4(b-1)$. 26. в) $\frac{ax+2a}{x^2-4}$; г) $\frac{ax+2a}{4-x^2}$; д) $\frac{-3a}{6-3x}$. 28. а) $\frac{5a^{2n}}{2}$; б) $\frac{3}{5b^{n+2}}$; в) $\frac{1}{3x^3}$; г) $\frac{13y^{2n-2}}{4}$. 29. а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{3}$; в) 7; г) 4,5. 30. г) $\frac{5a-10c}{2a}$; д) $\frac{2}{9(a-b)^2}$; е) $\frac{1}{(x-2y)^5}$. 33. а) 0,75; б) -2; в) $\frac{3}{40}$; г) $-\frac{2}{3}$. 34. а) $3x+y$; б) $\frac{1}{b^6-1}$; в) $\frac{a+b}{3}$; г) $\frac{5}{a-b}$; д) $\frac{b-y}{b+2d}$; е) $\frac{3a+2b}{2b-1}$. 35. а) $\frac{a^n+b^2}{a}$; б) $\frac{x^n}{x^2-y^2}$; в) $\frac{x^n+x^{n-1}}{x-2}$; г) $\frac{b+3}{b^2-3b}$. 36. а) 1; б) $6\frac{1}{7}$. 37. а) $-\frac{3}{7}$; в) $-\frac{7a}{8b}$; д) $\frac{3y-2x}{2}$; е) $2x-3y$; ж) $\frac{a^2+1}{a-1}$; з) $\frac{a+2}{a-1}$. 38. д) $\frac{a}{a-x}$; е) $-\frac{x+y}{a+b}$; ж) $\frac{5-a}{3}$; з) $a+2$.

40. а) $\frac{1}{a^2-2a+2}$. Указание. Представьте знаменатель дроби a^4+4 в виде $(a^2+2)^2-4a^2$; б) $\frac{1}{b^2+b+1}$. Указание. Умножьте числитель и знаменатель дроби на $b-1$; в) $\frac{1}{9x^2-3x+1}$. Указание. Умножьте числитель и знаменатель дроби на $9x^2-1$, представив дробь в виде

$\frac{(27x^3-1)(3x+1)}{(27x)^6-1}$; г) $\frac{2y^2-1}{4y^4-2y^2+1}$. Указание. Представьте знаменатель дроби в виде $(4y^4)^2-(2y^2+1)^2$ и разложите на множители, а числитель представьте в виде $(2y^2-1)(4y^4+2y^2+1)$; д) $\frac{x-5}{x+5}$. Указание. Представьте числитель и знаменатель дроби в виде квадратных трехчленов, разложите их на множители и сократите дробь; е) $\frac{a^2+b^2}{a^2+c^2}$. **42.** Указание. Графиком является прямая, заданная уравнением $2x-y-1=0$, с выколотой точкой $(0; -1)$. **43.** а) $\frac{6a^2+4a+3}{2a-1}$; б) $\frac{2x^2-5x+4}{x+3}$. **44.** а) $\frac{1}{n+1}$; б) $n(n+1)$. **45.** а) 18; б) 20. **47.** а) 1; б) 1. Указание. Данный многочлен представьте в виде $(a-2b+5)^2+1$. **48.** а) $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$; б) $\left(y-\frac{1}{3}\right)^2$; в) $(a-2)(a+2)(a^2+4)$; г) $(a^2-6a+18)(a^2+6a+18)$. **52.** а) $\frac{1}{a^n+1}$; б) $\frac{b}{b^n-2}$; в) $2x^n-2$; г) $\frac{y^n-6}{y}$. **53.** а) $2b$; б) $2a$; в) 1; г) $\frac{1}{a-5b}$; д) $\frac{3a+b}{3a-b}$; е) $\frac{x^2+2xy+4y^2}{x^2-4xy+y^2}$. **54.** а) $\frac{3a+2b}{6x}$; б) $\frac{3c-4d}{72y}$; в) $\frac{x}{2y}$; г) $\frac{m}{2n}$; д) $\frac{5}{6}$; е) $\frac{1}{24}$. **56.** а) $\frac{2x^2-y^2}{x^2-xy}$; б) $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$; в) $\frac{6}{4x^2-9}$; г) $\frac{7}{6y+12}$; д) $\frac{2a-5}{10a-20}$; е) $\frac{56-20}{8b-20}$. **58.** а) $\frac{a-3}{3a}$; б) $\frac{b-2}{2b}$; в) $\frac{1}{xy}$; г) $\frac{1}{xy}$; д) $\frac{2c^2+5c+6}{c^3-9c}$; е) $\frac{3d}{16-d^2}$. **59.** а) $\frac{n+2}{(n+1)!}$; б) $\frac{1-n}{n!}$. **61.** а) a^{n-1}; б) $\frac{1}{xy}$; в) 1. Указание. Сократите каждую дробь до выполнения вычитания; г) $6b^n$. **63.** г) $\frac{x^2+y^2}{2x}$; д) $\frac{p^2-8p}{p-4}$; е) $\frac{2cd}{c+d}$. **64.** а) 0; б) $\frac{1}{y-5}$; в) $-\frac{4}{b+c}$; г) $\frac{36}{a^4-18a^2+81}$; д) $\frac{2x-4}{x^2+2x+4}$; е) $\frac{2}{x+3}$. **65.** а) $\frac{x-6}{xy-4x-3y+12}$; б) $\frac{y^2+2y-10}{xy-5x+y-5}$; в) $\frac{b-2}{3a^2-2a}$; г) $\frac{2a}{a^2-b^2}$. **66.** а) 9; б) $3y$; в) x^2+2; г) x^2+2x+3. **68.** $\frac{24}{25}$. **69.** а) $\frac{4}{x^2+6x+5}$; б) $\frac{4}{x^2+10x+9}$. **70.** а) $\frac{16a^{15}}{a^{16}-65\,536}$; б) $\frac{16b^{30}}{b^{32}-1}$. **71.** а) $\frac{1}{x+2}$; б) 1; в) -12; г) $\frac{2a+2b}{a-b+c}$; д) 0. **72.** а) Корней нет;

б) 2; в) −1; г) −0,5. 77. $\frac{1}{2} = \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{2}{15}$. Указание. Дробь $\frac{1}{2}$ замените равной ей дробью, знаменателем которой является НОК(5, 6, 15), т. е. дробью $\frac{15}{30}$. Используя метод неопределенных коэффициентов, получим $\frac{15}{30} = \frac{a}{5} + \frac{b}{6} + \frac{c}{15}$. Отсюда $15 = 6a + 5b + 2c$. Положив $a = 1$, $b = 1$, найдем что $c = 2$. 78. а) $a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{2}{3}$; б) $a = 2$, $b = 3$. 79. а) $\frac{5x-1}{x(x-1)} = \frac{1}{x} + \frac{4}{x-1}$; е) $\frac{3x-4}{x^2+10x+24} = \frac{3x-4}{(x+4)(x+6)} = \frac{-8}{x+4} + \frac{11}{x+6}$. 80. а) $\frac{6x+1}{4x^2-1} = \frac{1}{2x+1} + \frac{2}{2x-1}$; в) $\frac{x+17}{(2x-1)(3x+2)} = \frac{5}{2x-1} - \frac{7}{3x+2}$. 81. а) $a^2 - 7a + 5$; б) $2x^3 + 3x^2 - 5x - 7$; в) $y^2 - 4y - 5$; г) $4b^3 - b^2 - 2b + 3$. 82. а) При $n = 3$; д) при $n = 5$; е) при $n = 3$. 83. а) −3, 3, 6; б) −6, 0, 2, 4, 6, 12; в) −1, 1, 4, 64, 125, 343. 84. а) 1; б) 0; в) 9. 86. (0; −3), (1; −2), (3; 3), (4; 3). 87. $y = 3$, $y = 2x - 1$; б) $y = x + 2$, $y = 2x$; в) таких прямых не существует. 90. $-\frac{1}{8}$. 91. $t = \frac{2sv}{v^2-9}$, 3 ч 40 мин. 94. в) $-a^n$; г) $(x^n - 1)^2$. 96. а) $\frac{2}{3}$; б) $\frac{x-3}{3x}$; в) $\frac{5x-5}{x}$; г) $\frac{a+5b}{a-5b}$; д) $\frac{2x+6}{x-7}$; е) $\frac{5}{y+11}$. 98. а) $\frac{1}{3x-xy}$; б) $\frac{1}{x-y}$; в) $\frac{1}{x-6}$; г) $\frac{a-b}{a+b}$. 99. а) $\frac{1}{a+2}$; б) $-\frac{y+2}{2x^2+xy}$; в) $\frac{6}{x^2+6x}$; г) $\frac{y^2+y-2}{y^2-y-2}$. 100. ж) $\frac{(x-7)^3}{(x-5)^3}$; з) $\frac{36(a+3)^2}{(a-3)^4}$. 101. в) $-\frac{x^6}{y^6}$; г) $\frac{(a+6)^4}{(b+6)^4}$. 102. а) $\frac{3y-10}{3y+5} = -4$; б) $\frac{x-5}{60x} = -0{,}4$. 103. a. 105. 48 км. 108. а) $\frac{a^2}{8b^2}$; б) $x^{n-1}y^{n+2}$; в) $\frac{25a^{n+2}bd^{n-1}}{2c^n}$; г) $\frac{x^2y^2}{p^{n-1}q^{n-1}}$. 110. г) $\frac{2x^2y-2xy^2}{5}$; д) $\frac{9a+7b}{ab}$; е) $\frac{2(a+5)^2}{3a}$. 111. г) $\frac{3a+3b}{2a-2b}$; д) $\frac{p^2-3pq}{p^2q+2pq^2-3q^3}$; е) $\frac{2b^2-ab}{3a}$. 112. а) −2; б) не имеет смысла. 113. в) $\frac{5xy}{2}$; г) 1. 114. а) $\frac{(x-b)^2}{(x+b)^2}$; б) $\frac{y-5}{y+5}$; в) $\frac{ab-6a-3b+18}{ab+5a+7b+35}$; г) $\frac{a^2-4}{2b^2-4}$. 115. а) $-\frac{125}{x^3}$; б) $\frac{(y-2)^6}{(y-1)^6}$. 116. $\frac{a-b}{2ab}$, $-\frac{7}{24}$. 118. 7 км. 119. а) $c = \frac{ab}{a+b}$; б) $a = \frac{bc}{b-c}$. 120. а) $\frac{a+1}{2a}$; б) $-\frac{b}{3}$; в) $\frac{3x}{x+1}$; г) $\frac{2y}{y+5}$;

д) $\dfrac{a^2-ax}{a+x}$; е) $\dfrac{3y-3b}{b}$. 121. а) $\dfrac{a-b}{b}$; б) $\dfrac{b^2}{bc-c^2}$; в) 1; г) −1; д) 1; е) $-b$. 122. а) $\dfrac{y^2+2y+1}{x^2}$; б) 0; в) $\dfrac{2-2m^2}{m^2}$; г) $q-2p$. 123. а) $1-2x$; б) $\dfrac{by+y^2}{2}$; в) $\dfrac{x^2-2x+12}{x}$; г) $\dfrac{5x^2-3}{x}$; д) $\dfrac{2ab}{a^2+b^2}$; е) $\dfrac{y}{2x+2y}$. 124. а) −1; б) $\dfrac{a}{3a+2b}$; в) $\dfrac{2y+1}{2}$; г) $\dfrac{1}{x^4-x^2}$. 127. а) $\dfrac{y}{y^2-1}$. Указание. Разложите на множители знаменатель каждой дроби в скобках, а затем примените распределительное свойство умножения. б) Указание. Знаменатель $x^4-2x^3+3x^2-4x+2$ представьте в виде $(x-1)^2(x^2+2)$, сократите первую дробь в скобках, а затем воспользуйтесь распределительным свойством умножения. 128. а) $\dfrac{1}{a}$; б) $\dfrac{1}{ab}$; в) $\dfrac{1}{x-1}$; г) $\dfrac{1}{x^4-x^2}$. 130. 9. 131. 2.

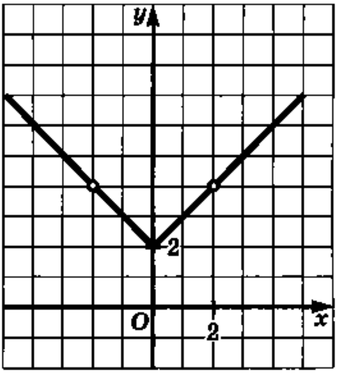
132. Указание. а) Из того, что $\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{c}$, следует: $\dfrac{a^2}{b^2}=\dfrac{b^2}{c^2}$, $\dfrac{a^2}{b^2}+1=\dfrac{b^2}{c^2}+1$, $\dfrac{a^2+b^2}{b^2}=\dfrac{b^2+c^2}{c^2}$, $\dfrac{a^2+b^2}{b^2+c^2}=\dfrac{b^2}{c^2}=\dfrac{a^2}{b^2}$; б) так как $\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{c}$, то $\dfrac{a}{b}+1=\dfrac{b}{c}+1$, $\dfrac{a+b}{b}=\dfrac{b+c}{c}$, $\dfrac{a+b}{b+c}=\dfrac{b}{c}$, $\left(\dfrac{a+b}{b+c}\right)^2=\dfrac{b^2}{c^2}=\dfrac{ac}{c^2}=\dfrac{a}{c}$. 133. 10 км/ч.

134. а) $\dfrac{5}{12}$; б) 8; в) 37; г) 79. 135. а) $2\dfrac{5}{7}$; б) 13. 136. а) $n\in\{-32; -6; -4; -2\}$; б) $n\in\{-10; 0; 1; 31\}$; в) $n\in\{-9; 0\}$; г) $n\in\{-1; 29\}$; д) $n\in\{-3; 3\}$; е) $n\in\{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$. 137. д) При $x\neq 0$ и $x\neq 3$; е) при $x<0$. 140. д) Из равенства $ad=bc$ при делении его на выражение bd следует пропорция $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$. Прибавим к обеим частям равенства число n и получим $\dfrac{a}{b}+n=\dfrac{c}{d}+n$ или $\dfrac{a+nb}{b}=\dfrac{c+nd}{d}$. Из этого равенства следует равенство обратных величин, т. е. $\dfrac{b}{a+nb}=\dfrac{d}{c+nd}$; е) из равенства $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ следует $\dfrac{2a}{b}=\dfrac{2c}{d}$. Прибавим к обеим частям равенства 1, получим $\dfrac{2a+b}{b}=\dfrac{2c+d}{d}$. Умножим это равенство на выражение $\dfrac{b}{2c+d}$, получим $\dfrac{2a+b}{2c+d}=\dfrac{b}{d}$. Поскольку $\dfrac{b}{d}=\dfrac{a}{c}$, то получаем требуемое: $\dfrac{2a+b}{2c+d}=\dfrac{a}{c}$.

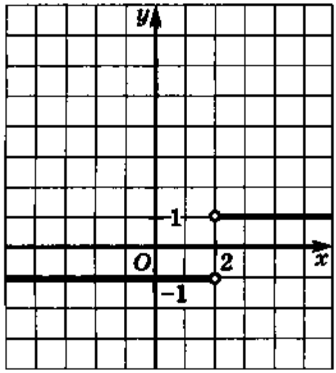
141. а) $\frac{x+2}{x-1}$; б) $\frac{y-1}{y+1}$; в) $\frac{a^2-a+1}{a+2}$; г) b^2+b+1; д) $\frac{a+3b}{a-3b}$; е) $\frac{b-x}{b^2-6by}$.

142. а) $\frac{1}{a^4-a^2+1}$; б) 1. **145.** а) $-\frac{7}{8}$; б) $\frac{1}{162}$. **146.** $\frac{1}{11}$. **149.** а) 0,05; б) 0,04.

150. а)



б)



151. а) $\frac{x^{2n}+3x^n+9}{x^n+7}$; б) $\frac{a^n+5}{a^n+4}$; в) $\frac{a}{2a^n-3b^n}$; г) a^n-b^n. **154.** 8.

155. а) $\frac{6x}{2x+y}$; б) $\frac{x^2+y^2}{xy}$; в) $\frac{4}{2a-1}$; г) $-\frac{18}{36+y}$. **156.** а) 0; б) 0; в) 1.

158. $a=b=c=1$. **160.** а) 0,25; б) 1. **162.** а) $a=2$ и $a=-2$; б) $a\in\{-3; -1; 1; 3\}$.

166. а) $\frac{x+1}{x-1}$; б) $\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2$; в) $\frac{x^3}{(x+y)^2}$; г) $\frac{2a(a+2b)}{a-2b}$. **167.** а) $\frac{3xy}{2}$; б) $3ab$.

168. а) $x+1$; б) $y-2$; в) $\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$; г) x^2-y^2. **170.** а) $-\frac{x^2-3xy}{xz-10z^3}$; б) $\frac{a^2-b^2}{a+3b+1}$; в) $\frac{2x-3}{x-6}$. **172.** а) $\frac{(2a-3b)^2}{(2a+3b)^2}$; б) $\frac{a^6}{b^6}$. **174.** а) $\frac{a^2-2ab+b^2}{a-b+1}$; б) $\frac{x^2+2xy+y^2}{x+y+1}$; в) $\frac{2cd}{2c-d}$; г) $\frac{12x^2y+3y}{2x+3y}$. **176.** Указание. а) Пусть $\frac{x_1}{x_2}=\frac{x_2}{x_3}=\frac{x_3}{x_4}=k$. Тогда $x_1=kx_2$, $x_2=kx_3$, $x_3=kx_4$. Сложив почленно эти равенства, получим: $x_1+x_2+x_3=k(x_2+x_3+x_4)$. Отсюда $\frac{x_1+x_2+x_3}{x_2+x_3+x_4}=$ $=k=\frac{x_1}{x_2}$; б) из доказанного в а) следует, что $\frac{x_1+x_2+x_3}{x_2+x_3+x_4}=\frac{x_1}{x_2}$,

$\frac{x_1 + x_2 + x_3}{x_2 + x_3 + x_4} = \frac{x_2}{x_3}$, $\frac{x_1 + x_2 + x_3}{x_2 + x_3 + x_4} = \frac{x_3}{x_4}$. Перемножив эти равенства, получим $\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{x_2 + x_3 + x_4}\right)^3 = \frac{x_1}{x_4}$. **178.** а) $\frac{4b - 12}{5}$; б) $\frac{4a}{3a + 6}$; в) $10x$; г) $\frac{4x}{x + 2y}$. **179.** а) $\frac{x - z}{y - z}$; б) $\frac{a^3 + x^3}{a^3 - x^3}$; в) $\frac{x + 1}{2x + 1}$; г) $\frac{1}{y}$. **180.** а) $a + b$; б) $\frac{a}{b}$. **181.** а) $\frac{1}{z + 2}$; б) $\frac{x^2 - 1}{2x - b}$.

Глава 2

190. 7 учащихся. **191.** 18 человек. **192.** 47 учащихся. **193.** В офисе работает 11 человек, только английский язык знает 1 человек. **196.** а) $(2n + 1; 3n - 1)$, где n — целое число; б) $(3n + 1; 2n - 1)$, где n — целое число. **197.** 30 способов. **206.** а) $\frac{1}{xy}$; б) $\frac{3}{x^2}$; в) $-\frac{1}{x^2y + xy^2}$. **208.** а) $y = 1$; б) $y = 1$, $y = 2\frac{7}{9}$. **216.** а) Да; б) нет; в) нет. **217.** а) Да; б) да; в) да. **218.** а) Нет; б) да. **219.** б) $-6, -3, -2, -1, 0, 3$; в) $0, 1$. **220.** а) $1, 2, 4, 5$; б) $-11, 1, 3, 15$. **225.** а) $(1; 17), (17; 1), (-1; -17), (-17; -1)$; б) $(0; 17), (16; 1), (-2; -17), (-18; -1)$; в) $(0; 19), (16; 3), (-2; -15), (-18; 1)$. **226.** а) $(3; 2), (-1; -6), (-7; -6), (-3; 2)$; б) $(-5; 6), (3; -4), (3; 2), (-5; 0)$; в) $(1; -1), (-1; 1)$; г) целочисленных решений нет. **227.** 4 учащихся. **228.** 9. **237.** -1. **238.** а) $\frac{39}{40}$; б) $2\frac{2}{17}$. **260.** а) $(3; 5), (-1; -1), (2; 5), (0; -1)$; б) $(3; -1), (1; 3), (5; 3), (-1; -1)$; в) $(0; 2), (2; 4), (-2; -5), (-2; -6)$; г) $(2; 1), (0; 1)$. **261.** а) Среднее арифметическое равно $5\frac{4}{7}$, медиана равна 6, среднее арифметическое меньше медианы; б) среднее арифметическое равно 5,25, медиана равна 5, среднее арифметическое больше медианы. **262.** д) -1 и 2; е) -1 и 1; ж) -4 и 6; з) -5 и 5. **268.** 18, 38, 60, 84. **269.** 3. **270.** а) 0 и 1; б) 0,1 и 4. **272.** 5. **273.** а) 3; б) 0. **274.** 4. **276.** Нет. **277.** 11. **278.** 7. **287.** а) 19; б) 105; в) 77; г) 115. **288.** а) $\frac{6}{7}$; б) $\frac{11}{31}$; в) $\frac{7}{20}$; г) $\frac{5}{7}$. **289.** а) 609 076; б) 105 006. **290.** $\frac{a^3 + 27}{36}$. **291.** а) $k \neq -1$; б) $k \neq \frac{1}{2}$; в) таких значений k не существует. **292.** а) $x \neq 1$; б) $x \neq \pm 1$; в) все числа; г) $x \neq 0$, $x \neq -1$. **303.** а) $\frac{37}{45}$; б) $\frac{11}{24}$; в) $\frac{7}{8}$; г) $\frac{36}{37}$. **310.** а) $(1; 11), (-1; -11), (11; 1), (-11; -1)$; б), в) $(2; 13), (0; -9)$, (12; 3), (−10; 1); г) (2; 15), (0; −11), (14; 3), (−12; 1). **311.** 26. **313.** 6 способов. **314.** а) $a = -1$, $b = 1$, $c = 2$, $d = 2$; б) $a = 1$, $b = 2$, $c = -1$, $d = 1$. **317.** а) 2, 3, 5; б) 2, 3, 5; в) 2, 3, 5, 13. **319.** а) $1176 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7^2$; б) $1020 = 2^2 \times \times 3 \cdot 5 \cdot 17$; в) $10! = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7$. **320.** а) 6; б) 10; в) 16. **329.** 3. Указание. Воспользуйтесь разбиением множества целых чисел на классы в зависимости от остатков от деления на 3. **330.** 3, 7, 31, 127, 511. **331.** 0, 1. **332.** $\frac{6}{x^2 - 9}$. **333.** 50 и 60 км/ч или 75 и 85 км/ч. **335.** 4 учащихся. **336.** 2 учащихся. **337.** 12 человек. **341.** −4, 0, 2, 6. **342.** −4, −1, 0, 1, 3, 4, 5, 8. **350.** а) 0, 1, 3, 4; б) 0, 1, 4. **351.** а) 26; б) 23. **359.** Указание. Воспользуйтесь разбиением множества целых чисел на классы в зависимости от остатков от деления на 6.

Глава 3

361. а) Да; б) да; в) да; г) нет; д) да; е) нет. **373.** а) −0,8(3); б) 12,625(0); в) −0,384(0); г) 1,7(14285). **374.** а) $\frac{4}{3}$; б) $\frac{223}{99}$; в) $\frac{151}{90}$; г) $\frac{5}{12}$; д) $\frac{577}{110}$; е) $\frac{17\,992}{4995}$. **375.** а) 5,3(40); б) 5,5(39). **376.** а) 2,4; б) 1,2. **377.** 2, 0,4, $5\frac{1}{3}$. **379.** а) $4\frac{7}{12}$; б) $3\frac{11}{12}$; в) $a^2 + \frac{1}{a^2} - \frac{a-1}{a+1}$; г) $\left(\frac{a+1}{a-1}\right)^2 + \left(\frac{a-1}{a+1}\right)^2 + \frac{1}{a}$. **389.** а) Например, 0,2121121112... **399.** а) $\frac{3a + b}{(a^2 - b^2)(a + b)}$; б) $\frac{a(b - a)}{a + b}$. **400.** $a = 1\frac{1}{3}$, $b = 5$. **413.** $\frac{4}{48}$, $\frac{4}{47}$, $\frac{4}{46}$, ..., $\frac{4}{24}$. **416.** а) Нет; б) да; в) да; г) да. **417.** а) Да; б) да; в) нет; г) нет; д) да; е) нет. **427.** а) 1,5; $-\frac{2}{3}$; б) 0; $\frac{5}{6}$; в) −1,2. **428.** $\frac{x}{6x - 4y}$. **429.** 3 ч 40 мин. **431.** а) 0,015; б) 0,004; в) 0,38; г) 1,3. **444.** а) 1; б) $\frac{1}{x^2 - y^2}$. **445.** $\alpha^2 - 2\beta$. **447.** а) −2, 2; б) корней нет; в) 0. **449.** ж) $-\frac{1}{50}$; з) $\frac{1}{4}$; и) −0,7. **450.** в) 0,8; г) −1; д) 1; е) −2. **455.** д) −0,81; е) 0,024. **456.** а) 0,2; б) 1. **461.** д) $a + \sqrt{3}$; е) $\sqrt{5} - 2b$. **464.** а) 9,25; б) корней нет; в) 4,36; г) корней нет. **465.** а) 1; б) 16; в) 1; г) 16. **466.** а) 0; 4; б) 0; 0,25; в) 2; 3; г) −1; 0,75. **469.** б) $\frac{3a^3 + 3a^4}{1 - a}$; в) $\frac{1}{14b - 7a}$. **484.** $\frac{xy}{2x + y}$. **486.** а) a^4; б) a^5; в) ab^2. **498.** а) 2,97; б) 3,96. **501.** д) $\frac{8}{15}$; е) $3\frac{1}{8}$. **503.** а) 70; б) 64; в) 5,5; г) 153; д) 33,6; е) 25. **504.** г) $6\frac{4}{11}$; е) $1\frac{2}{9}$. **512.** а) 108; б) 225; в) 256; г) 189; д) 216;

е) 174; ж) 460; з) 405. **518.** в) 40; г) 0,9; д) 0,5; е) 22. **520.** а) 2; б) −12. **521.** а) 6,3; б) −19,9. **522.** а) $\frac{2}{3}$; б) 102,4. **526.** а) (1; −1); б) (1; −1). **530.** а) $4\sqrt{5a}$; б) $29x\sqrt{3x}$; в) $-6{,}2b^2\sqrt{10b}$; г) $5{,}5a^3\sqrt{a}$. **536.** в) $8 + 4\sqrt{2} - 4\sqrt{6}$; г) $\frac{\sqrt{12}+\sqrt{30}-\sqrt{18}}{12}$; д) $\frac{\sqrt{10}-\sqrt{5}-2+\sqrt{2}}{3}$; е) $\frac{\sqrt{15}+\sqrt{10}-\sqrt{3}-\sqrt{2}}{4}$. **540.** а) $-3{,}5\sqrt{2a}$; б) $4\sqrt{2x}$; в) $\frac{x^3-4y}{x}$. **541.** а) $\frac{1}{128}$; б) $\frac{2}{169}$; в) 3; г) $\frac{1}{3}$. **544.** а) При $a = 0$; б) при $a = 0$; в) при $a = -4$; г) при $a = -1$. **546.** а) $\frac{a}{b}$; б) $-x$; в) $\frac{2x}{\sqrt{x+2}}$; г) $-\frac{x}{\sqrt{y}}$. **547.** а) $-\frac{\sqrt{2}}{2a}$; б) $\frac{\sqrt{3}}{3a}$. **548.** а) $\frac{b}{c}$; б) $a - b$. **549.** 4. **551.** а) $-\frac{2}{3}$, 1; б) −1,5, 1. **558.** а) 10; б) 6; в) 16; г) $2\sqrt{17} - 6$. **559.** а) $a = \sqrt{76}$; б) $a = \sqrt{20}$. **560.** а) $\sqrt{2} + 1$; б) $\sqrt{3} - 1$; в) $2\sqrt{3} - 1$; г) $2\sqrt{2} + 1$. **561.** а) 6; б) 2. **564.** а) $6\sqrt{\sqrt{11}+\sqrt{2}}$; б) $3\sqrt{2}\cdot\sqrt{\sqrt{3}+1}$; в) $3\sqrt{3}\cdot\sqrt{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$; г) $4\sqrt{2\sqrt{6}-\sqrt{15}}$. **565.** а) $\sqrt{5} - 2$; б) $\frac{\sqrt{12}+\sqrt{3}}{3}$; в) $\sqrt{3} + \sqrt{2}$; г) $\frac{\sqrt{14}-\sqrt{10}}{2}$. **566.** а) −6; б) $6a + 1$. **567.** а) $\sqrt{a-1} + \sqrt{a+1}$; б) $\sqrt{a-b} + \sqrt{a+b}$. **569.** а) $\sqrt{2a}$; б) 2. **571.** 3, −2. **574.** а) 4,(4); б) 4,5(8); в) 1,1(12); г) 7,(2). **575.** Указание. Воспользуйтесь методом от противного. **584.** $3\frac{10}{71}$. **589.** а) −1, 0, 1, 2; б) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10; в) 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10; г) 0, 1, 2. **591.** а) 84; б) $4\sqrt{26}$; в) 13,5; г) 21,5. **592.** а) $3\frac{2}{3}$; б) корней нет; в) $\frac{10}{63}$; г) −4; е) $11\frac{2}{3}$. **595.** а) $\frac{15}{16}$; б) $1\frac{7}{8}$; в) $42\frac{6}{7}$; г) $\frac{4}{15}$. **599.** а) $-\sqrt{a}$; б) $2\sqrt{ab}$. **601.** а) −2,5; б) 3; в) 32; г) $3\sqrt{2}$. **602.** а) $30 - 14\sqrt{3}$; б) −1. **606.** а) При $a = 2$; б) при $a = -4$. **607.** а) $\frac{\sqrt{12}+\sqrt{18}-\sqrt{30}}{12}$; б) $3\sqrt{6} - 5\sqrt{2} - 4\sqrt{3} - 1$; в) $\sqrt{6} + \sqrt{3} - \sqrt{2} - 2$; г) $\frac{\sqrt{10}+\sqrt{15}+\sqrt{14}+\sqrt{21}}{2}$. **608.** а) $\sqrt{b} + 1$; б) $\sqrt{a} + 1$. **610.** а) $x^2 - x\sqrt{2} + 1$; б) $\sqrt{1-x^2} - 1$. **611.** а) $\sqrt{10}$; б) $-\sqrt{2}$; в) $\sqrt{20}$; г) $-\sqrt{6}$. **612.** а) $4\sqrt{10} + 4$; б) $24 + 2\sqrt{138}$; в) $10 + 2\sqrt{22}$.

615. а) 1; б) -2; в) $2\sqrt{7}$; г) $2\sqrt{7}$. **616.** а) -1, если $a > 1$; $-\sqrt{a}$, если $0 < a < 1$; б) 2, если $a > 4$; $\sqrt{a}$, если $0 < a < 4$. **617.** $-\sqrt{ab}$. **619.** а) $a^2 + 1$; б) $a^2 + 4$; в) $\sqrt{a+2}$; г) $\sqrt{a+2}$; д) 5.

Глава 4

625. а) 0, $-0{,}6$; б) 0, 0,6; в) 0, 0,7; г) 0, 3; д) 0, $-\frac{1}{7}$; е) 0, $\frac{2}{3}$. **627.** а) 0, $\frac{3}{4}$; б) $-\frac{\sqrt{7}}{5}$, $\frac{\sqrt{7}}{5}$; в) 0, $-\frac{1}{9}$; г) $-2\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$; д) 0; е) 0. **629.** Нет. $x = 0$. **630.** а) $a - 1$, $1 - a$; б) $2m + 1$, $-2m - 1$. **631.** а) $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$; б) 0, 5; в) 0, $-\frac{1}{2}$; г) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\frac{\sqrt{3}}{3}$; д) 4, -4; е) 0, $-\frac{8}{9}$; ж) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$; з) 0. **632.** а) -1, 1; б) 0, $-\frac{3}{4}$; в) $-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$; г) -5, 5; д) $-1\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}$; е) 0, $-\frac{1}{2}$. **633.** а) -5, 5; б) -2, 2; в) -1, 1; г) $-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$. **634.** а) 0; 0,25; б) 1; 3,25; в) 0; г) 1,5. **635.** а) $x = 0$ или $x = \frac{1}{2}y$; б) $x = 0$ или $x = 2y^2$; в) $x = \pm y\sqrt{1{,}5}$; г) $x = \pm\sqrt{-y - y^2}$ при $y^2 + y \leqslant 0$. **637.** 5 и 8. **638.** 2 и 6 см. **639.** $1\frac{1}{3}$ см. **641.** а) 3,5 и 3,6; б) $-0{,}3$ и 0,6. **642.** а), б) Нет. **644.** а) 3, $-\frac{1}{2}$; б) -4, $-\frac{1}{3}$; в) $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3}$; г) $1\frac{2}{3}$; д) -2; е) корней нет; ж) $\frac{1}{4}$, -2; з) 10, -9. **645.** а) $-\frac{5 \pm \sqrt{5}}{10}$; б) $1 \pm \sqrt{3}$; в) $\frac{1 \pm 2\sqrt{3}}{6}$; г) 3, $-\frac{2}{5}$; д) $\frac{5 \pm \sqrt{5}}{4}$; е) $\frac{11 \pm \sqrt{21}}{4}$; ж) $1 \pm 2\sqrt{2}$; з) 5, $-\frac{3}{4}$. **646.** а) 2, $\frac{1}{6}$; б) $-4\frac{1}{2}$; в) корней нет; г) $-2 \pm \sqrt{5}$; д) $\frac{1 \pm \sqrt{97}}{16}$; е) $\frac{5 \pm \sqrt{10}}{3}$. **647.** а) 0,3, 1,1; б) $\frac{1}{6}$, 4. **651.** а) -1, $-1{,}8$; б) $\frac{13 \pm \sqrt{37}}{22}$; в) $\frac{3 \pm \sqrt{15}}{6}$; г) 0,8, 0,5. **652.** а) 1, 0,8; б) 2, 1; в) $\frac{-2 \pm 2\sqrt{6}}{5}$; г) $\frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$; д) $\frac{-6 \pm \sqrt{6}}{3}$; е) 4, $\frac{1}{4}$; ж) -2, $-2\frac{2}{3}$; з) 3, $-\frac{3}{5}$. **653.** а) 1, -7; б) $\frac{4 \pm \sqrt{7}}{9}$; в) $\frac{2 \pm \sqrt{14}}{5}$; г) 4, -2. **654.** а) $\frac{7 \pm \sqrt{23}}{13}$; б) -3, 1; в) 1, $\frac{1}{13}$; г) 6, $-4\frac{4}{15}$; д) $7\frac{1}{3}$, -2; е) $\frac{-3 \pm \sqrt{37}}{14}$; ж) 1, $-\frac{1}{8}$; з) $\frac{1}{2}$. **656.** а) $4\frac{1}{8}$, -3; б) 30, -19; в) 10, $7\frac{7}{9}$; г) 6, -4; д) 2, $-\frac{2}{3}$; е) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$. **657.** $q < 3$. **659.** 2.

660. а) 0,55; б) −1,22. **661.** а) −3, $5\frac{1}{16}$; б) 1, $-\frac{31}{35}$. **662.** а) $3b$, $2b$; б) $-b$, $-1{,}5b$; в) $-2b$, $3b$; г) $-b$, $\frac{2b}{3}$. **663.** $x = a$, $x = 4 - a$ при любом значении a. **667.** 1, $-\frac{7}{8}$. **668.** а) −6; б) 76; в) $3 - 2a\sqrt{6}$; г) 42. **669.** а) $\frac{1}{30}$; б) $-\frac{3}{4}$. **671.** а) ±1; б) ±1, ±4; в) $\pm\sqrt{5}$, $\pm\sqrt{3{,}5}$; г) $\pm\frac{1}{2}$, $\pm\sqrt{3}$; д) ±0,25; е) нет корней. **672.** а) ±2, ±3; б) ±3, $\pm\sqrt{3}$; в) $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$; г) ±1, $\pm\frac{1}{2}$; д) ±2; е) ±3. **673.** а) (0; 9), (1; 0), (−1; 0), (3; 0), (−3; 0); б) (0; 4), (0,5; 0), (−0,5; 0), (2; 0), (−2; 0); в) (0; 0), (3; 0), (−3; 0); г) (0; 0). **674.** а) ±4; б) ±1, $\pm\frac{1}{2}$; в) нет корней; г) 1, −3; д) −1, 0,75; е) 2, −0,4. **675.** а) ±3; б) ±2, $\pm\sqrt{6}$; в) ±2; г) 0 при $b^2 + 4c < 0$; 0 при $b = c = 0$; 0 при $b^2 + 4c = 0$ и $b \leqslant 0$; 0 и $\pm\sqrt{\frac{b}{2}}$ при $b^2 + 4c = 0$ и $b > 0$; 0 и $\pm\sqrt{\frac{b + \sqrt{b^2 + 4c}}{2}}$ при $b^2 + 4c > 0$, $b - \sqrt{b^2 + 4c} \leqslant 0$ и $b - \sqrt{b^2 + 4c} > 0$; 0 и $\pm\sqrt{\frac{b - \sqrt{b^2 + 4c}}{2}}$ при $b^2 + 4c > 0$, $b - \sqrt{b^2 + 4c} > 0$ и $b - \sqrt{b^2 + 4c} \leqslant 0$; 0, $\pm\sqrt{\frac{b + \sqrt{b^2 + 4c}}{2}}$ и $\pm\sqrt{\frac{b + \sqrt{b^2 + 4c}}{2}}$ при $b^2 + 4c > 0$, $b - \sqrt{b^2 + 4c} > 0$ и $b - \sqrt{b^2 + 4c} > 0$. **676.** а) ±2; ±4; б) 0; 2. **677.** а) 2; −4; б) 5; −4; в) 2; −3; г) $1 \pm \sqrt{2}$; 3; −1. **678.** а) −7; 4; б) −3; 4. **679.** а) −8; 3; б) −1; 7; в) −16; 2; г) −1; 8. **680.** а) −7; 3; б) −2; 4; в) −8; 2; г) −5; 3. **681.** Наименьшего значения не существует, наибольшее значение равно 107. **682.** $a = 3$, $b = 1{,}5$. **683.** 16,9. **684.** 9 и 14 см. **685.** 42 см. **686.** 96 и 90 см. **687.** 24. **688.** 6 и 8 м. **690.** 16. **691.** 11 и 13. **692.** 6 и 9. **693.** 7. **695.** 32. **696.** 44. **697.** 10. **698.** 8 и 7 л. **699.** 20 и 10 л. **702.** а) 1; б) $\sqrt{a} - \sqrt{b}$. **707.** $y = -3\frac{1}{5}$, $z = -3\frac{2}{5}$. **708.** $D > 0$, p и q — противоположные числа. **709.** $D > 0$, второй коэффициент равен свободному члену. **713.** $x_2 = \frac{1}{3}$, $q = -2$. **718.** −96. **719.** 1. **720.** −35. **722.** а) 3; 2; б) −2; 3; в) −3; −2; г) −3; 2. **723.** а) 3; a; б) −3; $-a$; в) 3; $-a$; г) −3; a. **731.** а) $x^2 - 7x + 12 = 0$; б) $x^2 + x - 12 = 0$; в) $x^2 - x - 12 = 0$; г) $x^2 + 7x + 12 = 0$. **732.** а) $x^2 - 3ax + 2a^2 = 0$; б) $x^2 + ax - 2a^2 = 0$; в) $x^2 - ax - 2a^2 = 0$; г) $x^2 + 3ax + 2a^2 = 0$. **733.** а) $x^2 - 3 = 0$; б) $x^2 + 2x - 2 = 0$; в) $x^2 - 5 = 0$; г) $x^2 - 4x - 1 = 0$. **734.** 6 см. **735.** 48 см². **737.** $a = -2$. **739.** а) Да; б) нет; в) да; г) нет; д) да; е) да. **740.** а) $(u + v)((u + v)^2 - 4uv)$; б) $(u + v)^2 - 5uv$; в) $(u + v)((u + v)^2 - 4uv) - 4uv$;

г) $\frac{(u+v)^2-2uv}{(uv)^2}$; д) $(u+v)((u+v)^2-4uv)$; е) $(u+v)^2((u+v)^2-3uv)$.

741. $\frac{q^2-p}{2}$. **742.** $\frac{n^2}{3}-\frac{m}{3n}$. **743.** а) 84; б) 164; в) 86; г) 26 896. **744.** а) 0,5;

б) $\frac{337}{1296}$. **748.** -2176. **753.** $n=6$. **754.** а) 2; б) $1+\sqrt{2}$. **755.** а) $(9-2x)(x+2)$;

б) $(5y-3)(3y+2)$; в) $(9-4m)(3m+1)$; г) $3(x-0{,}7)(x+1)$; д) $(k+0{,}8)^2$; е) $3(p-0{,}3)(p+0{,}3)$. **757.** а) $3x(x-2)(x-1)$; б) $y(y-4)(y+8)$; в) $(x-a)(x-6)(x-3)$; г) $(2y+m)(y+5)(y-2)$. **758.** а) $2x(2x-5)(3x+2)$; б) $4m(4y+1)\times(5y-2)$; в) $5x(3x-4)(2x+3)$; г) $4k(5m+2)(m-5)$. **759.** а) $(2x-y)(x-2y)$; б) $(x-2y)(2x+y)$; в) $(x+2y(2x-3y)$; г) $(x-2y)(2x-3y)$. **760.** а) $\frac{2y+5}{4}$;

б) $\frac{2x+3}{3x+2}$; в) $\frac{k-7}{4k-3}$; г) $\frac{6p-5}{3p+4}$. **761.** а) $\frac{m(3x-2)}{2(6x+1)}$; б) $\frac{3y-1}{4y-3}$.

762. а) x^2+6x+8; г) $\frac{x-6}{(x-3)(x-12)}$. **765.** а) 49; б) 51; в) 104; г) 21. **766.** б) 2; $-0{,}5$. **767.** а) $(y-3)(4a-5y)$; б) $(m+n)(m-n)(3m+2n)$. **768.** 11 и 14 см. **769.** а) $-3\frac{1}{2}$; б) 1; в) -1; г) $\frac{1}{3}$; д) 2,4, -2; е) $3\frac{1}{2}$, -2. **770.** а) 5, 4; б) $\pm\sqrt{2}$; в) 4; $\frac{1}{5}$; г) корней нет; д) -3, $-5\frac{1}{3}$; е) 2, $\frac{1}{3}$. **771.** а) $1\frac{1}{2}$, -1; б) -3; в) 3; г) $-1\frac{1}{2}$, -5; д) 1, $1\frac{3}{7}$; е) $\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{21}$. **772.** а) 2, $\frac{1}{2}$; б) 5, $1\frac{2}{3}$; в) $-1\frac{1}{14}$, -2; г) 1, $\frac{1}{15}$. **774.** а) $\left(1\frac{1}{2};\ 0\right)$, (1; 1); б) (12; 42), (−1; 3). **775.** а) 4, $-4\frac{2}{3}$; б) $\frac{1}{2}$, -6; в) 6, -1; г) 2, $1\frac{1}{4}$. **776.** а) 2, -1; б) 6, -3; в) корней нет; г) корней нет. **777.** а) $4\frac{1}{3}$, -2; б) $3\frac{1}{2}$, 1. **778.** а) $5\pm4\sqrt{3}$; б) -4, -5. **779.** а) 6, -1, 3, -2; б) $\frac{-3\pm\sqrt{33}}{2}$. **782.** а) $4m$, m; б) $\frac{13\pm\sqrt{169-25m}}{m}$ при $m\leqslant 6\frac{19}{25}$. **783.** а) $\sqrt{2}$; б) 41. **785.** 6 и 12. **786.** $\frac{12}{18}$. **787.** $\frac{5}{8}$, $\frac{3}{6}$. **788.** 50 км/ч. **789.** $1\frac{1}{2}$ ч. **790.** 20 км/ч. **791.** 2 или 2,5 ч. **792.** 10 и 15 ц/га. **793.** 15 км/ч. **794.** 16 км/ч. **795.** 4 км/ч. **796.** 10 и 15 дней. **797.** 30 и 20 ч. **798.** 12 дней и 4 дня. **804.** 60 км/ч. **805.** 100 км/ч. **806.** 2 и 14 км/ч. **811.** а) $\pm1\frac{1}{2}$; б) корней нет; в) ±10. **812.** а) 0; 1,5; б) 0; $\frac{1}{12}$; в) 0; 1,5; г) 0; -5. **813.** а) 0; 8; б) ±6; в) ±3; г) 0; ±16. **814.** а) ±1; б) 0, -2; в) $\pm\frac{3}{4}$; г) ±8. **815.** а) $\pm\sqrt{a}$ при $a\geqslant 0$; б) $\pm\sqrt{-a}$ при $a\leqslant 0$; в) $\pm a$; г) 0 при $a=0$; д) 0, $\frac{3a}{2}$; е) $\pm3\sqrt{a}$ при $a\geqslant 0$. **817.** а) $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$; б) $\frac{1}{4}$, $-1\frac{1}{2}$; в) $\frac{2}{3}$; г) $-0{,}5$, $-0{,}3$; д) $1\pm\sqrt{3}$; е) $\frac{1}{2}\pm\sqrt{2}$; ж) $-3\pm\sqrt{5}$;

з) $-1 \pm 2\sqrt{3}$. **818.** а) -3, $5\frac{1}{2}$; б) -2, $6\frac{1}{2}$; в) 8, 4; г) -1, $9\frac{1}{2}$; д) 2, $\frac{2}{5}$; е) $\frac{1}{13}$, -1. **820.** а) 4, -3; б) 0, 1; в) 3, $\frac{2}{5}$; г) -1, -3. **821.** а) 3; 7; б) 24; 12; в) 3; -13; г) 2; д) нет корней; е) нет корней; ж) $18 \pm 6\sqrt{5}$; з) 6. **822.** $x^4 - 7x^2 + 10 = 0$. **823.** а) 1; -7; $3 \pm \sqrt{6}$; б) нет корней; в) 6; -1; г) -1; 5; $4 \pm 2\sqrt{2}$. **824.** а) 1; 2; -2; -3; б) 0,6; $-\frac{3}{7}$; 0,75; $-0{,}25$. **825.** -1; 4. **828.** 8 и 9, -9 и -8. **829.** 6, 8 и 10. **830.** 10, 11 и 12 см. **831.** 2 см. **832.** 23 см. **833.** 12. **834.** 6. **835.** а) $-1{,}5$; б) 1. **836.** а) -14; б) -8; в) $\frac{2}{5}$; г) 0. **837.** а) $b = 6$, $c = 0$; б) $b = 4$, $c = 16$. **842.** а) $\frac{m+3}{2m-3}$; б) $\frac{c-2}{c-1}$; в) $\frac{x-5}{y(x^2-x+1)}$. **843.** а) $\frac{x+4}{x+2}$; б) $-\frac{3}{m+1}$. **844.** а) ± 3, $\pm\frac{1}{2}$; б) ± 2, $\pm\frac{1}{3}$. **846.** а) При $m > 2$; б) при $-6 < m < 6$. **847.** а) 15, 3; б) 2, -1; в) 6, -8; г) 5, 3. **848.** а) 3, $-\frac{22}{23}$; б) -2, $\frac{33}{35}$; в) 1, $\frac{1}{4}$; г) $\frac{4}{11}$, -1; д) 0, 3; е) $1\frac{1}{2}$, -2; ж) 1, $-4\frac{1}{2}$; з) $\frac{1}{3}$, $-\frac{2}{9}$. **850.** $6\frac{2}{3}$, $3\frac{1}{3}$. **851.** $\frac{3}{8}$. **852.** $\frac{4}{6}$ и $\frac{12}{6}$. **853.** $\frac{2}{6}$ и $\frac{5}{12}$. **854.** 50 км/ч. **855.** 40 ч. **856.** 50 км/ч. **857.** 2, 2,2 и 2,5 ч. **858.** 225 и 200 км. **859.** 50 км/ч. **860.** 60 км/ч. **861.** 3 км/ч. **862.** 4,5 км/ч. **863.** 3 км/ч. **864.** 4 км/ч. **865.** 23 км/ч. **866.** 3 и 3,5 м. **867.** 1,8 и 2,4 м. **868.** 30 и 20 ч. **869.** 60 и 40 ч. **870.** 10 и 15 дней. **871.** 60 и 90 дней. **872.** 6 и 12 ч. **873.** 20 ч. **874.** 8 суток. **875.** На 0,5 мин.

Глава 5

882. Ближе к станции. **883.** В первый бак. **884.** Первый вкладчик. **889.** а) -3; 2; б) -4; 7; в) -11; 5; г) -2; 4. **890.** а) 3; б) $\frac{1}{27}$. **905.** $-3\frac{6}{7}$. **908.** а) $-1 \pm \sqrt{2}$; б) $\frac{3 \pm \sqrt{3}}{2}$; в) 1; $-\frac{1}{3}$; г) $\frac{-3 \pm \sqrt{21}}{6}$. **917.** $0{,}6 < c < 4{,}1$. **929.** а) $2{,}8 < 2\sqrt{2} < 3$; б) $2{,}4 < 1 + \sqrt{2} < 2{,}5$; в) $0{,}4 < \sqrt{2} - 1 < 0{,}5$; г) $9{,}2 < 5 + 3\sqrt{2} < 9{,}5$. **930.** $q \in \{5; 8; 9\}$. **931.** $q \in \{7; 12; 15; 16\}$. **932.** а) 2,5; б) 7. **959.** Вторая группа. **960.** а) $(-\infty; 4)$; б) $(7{,}7; +\infty)$; в) $(3; 6{,}5)$; г) $\varnothing$. **961.** 17. **963.** а) $-0{,}1$; б) -2. **965.** г) $\left[-\frac{5}{7}; +\infty\right)$; д) $(2{,}1; +\infty)$; е) $(-\infty; +\infty)$; ж) $\varnothing$; з) $[\sqrt{3} + 1; +\infty)$; и) $(-1; +\infty)$. **966.** д) $(2{,}5; +\infty)$; е) $(-50; +\infty)$; ж) $[-10; +\infty)$; з) $[0{,}6; +\infty)$. **967.** в) $x > 20$; г) $x < 8\frac{4}{7}$. **970.** а) $p \geqslant 0$; б) $p \leqslant 1$; в) $p \leqslant 2\frac{2}{3}$; г) $p \geqslant \frac{7}{30}$. **971.** а) $\left(\frac{1}{7}; +\infty\right)$; б) $(5{,}5; +\infty)$; в) $\left(-\infty; 4\frac{1}{6}\right)$;

г) $(-\infty;\ 10{,}5)$; д) $(-1{,}52;\ +\infty)$; е) $\varnothing$. **972.** а) $(-\infty;\ -1)$; б) $\left(-\infty;\ \frac{10}{17}\right)$; в) $\left(-\infty;\ -\frac{1}{6}\right)$; г) $(-\infty;\ 9)$. **973.** а) $\left(-\infty;\ \frac{1}{4}\right)$; б) $[1;\ +\infty)$; в) $(-0{,}26;\ +\infty)$; г) $(-\infty;\ 4]$. **974.** а) -4; б) -3. **975.** а) 14; б) -120. **976.** а) $b \ne 0$; б) $b < 0$; в) $b > 3$; г) $b < 1{,}5$. **977.** а) $-4{,}8$; б) $23\frac{1}{3}$. **978.** а) $x < \frac{3}{2m}$; б) $x > -\frac{7}{4m}$. **980.** а) $m = 3$. **981.** а) $(-\infty;\ 1{,}2)$; б) $(20;\ +\infty)$; в) $(-\infty;\ 142)$; г) $(-\infty;\ 375)$; д) $(-\infty;\ 30]$; е) $\left[3\frac{1}{3};\ +\infty\right)$. **982.** а) $x < \frac{2}{15}$; б) $x < -\frac{3}{14}$. **983.** а) $(80;\ +\infty)$; б) $(-\infty;\ 1)$; в) $(-6;\ +\infty)$ г) $(-\infty;\ -8]$; д) $(-\infty;\ -18)$; е) $(-\infty;\ 10]$. **984.** а) $\left(-\infty;\ -\frac{1}{4}\right)$; б) $[-0{,}6;\ +\infty)$; в) $(-4;\ +\infty)$; г) $\left(-\infty;\ -4\frac{1}{3}\right]$. **985.** а) При $a > -36\frac{1}{3}$; б) при $a > 110$. **986.** а) $(-0{,}4;\ +\infty)$; б) $(3{,}6;\ +\infty)$; в) $[20;\ +\infty)$; г) $(-\infty;\ 0{,}3)$; д) $\left[1\frac{1}{7};\ +\infty\right)$; е) $\left(1\frac{17}{18};\ +\infty\right)$. **987.** а) $\left(-\infty;\ 1\frac{8}{9}\right)$; б) $\left(-1\frac{1}{9};\ +\infty\right)$; в) $\left(11\frac{1}{3};\ +\infty\right)$; г) $(-\infty;\ -15)$. **988.** а) -1; б) -2; -1. **989.** а) 8; б) 6. **990.** а) Бесконечно много; б) 1; в) 0. **991.** а) При $x \in \left[1\frac{2}{3};\ +\infty\right)$; б) при $x \in (-\infty;\ 2{,}5]$; в) при любых x; г) ни при каких. **992.** а) $[1{,}6;\ 2{,}5) \cup (2{,}5;\ +\infty)$; б) $(-\infty;\ 1{,}5)$; в) $[0{,}5;\ 2{,}5) \cup (2{,}5;\ +\infty)$; г) $(-\infty;\ 3) \cup (3;\ +\infty)$. **993.** а) $p > \frac{1}{3}$; б) $p < \frac{1}{3}$; в) $p \leqslant \frac{1}{3}$. **994.** При $a < 1{,}2$. **995.** При $b \ne -1$, $b < 0$. **996.** а) $\frac{28 - 4m}{3}$, $m > 7$; б) $-\frac{32m + 160}{17}$, $m > -5$. **997.** До 5 мин. **998.** Больше 18 км/ч. **999.** $n = 8$. **1000.** $n = 12$. **1001.** 64 плитки. **1002.** а) Нет такого значения; б) $c > \frac{1}{6}$; в) $c < \frac{1}{6}$. **1005.** 3. **1006.** $x + 6$ — частное, 22 — остаток. **1008.** а) $\left(3\frac{1}{3};\ +\infty\right)$; б) $(-\infty;\ -1{,}5)$; в) $\left(0;\ \frac{1}{6}\right]$; г) $\varnothing$; д) $(6;\ +\infty)$; е) $\varnothing$. **1009.** а) $(0;\ 0{,}5)$; б) $\varnothing$; в) $(-\infty;\ 0)$; г) $\left[-7;\ \frac{1}{6}\right)$. **1010.** Таких значений нет. **1011.** а) $[1{,}4;\ 1{,}6]$; б) $[2{,}5;\ +\infty)$; в) $\left[\frac{1}{3};\ 1\right) \cup (1;\ +\infty)$; г) $[2;\ 4) \cup (4;\ 5]$; д) $\left[\frac{1}{30};\ \frac{1}{18}\right) \cup \left(\frac{1}{18};\ \frac{1}{15}\right]$; е) $(0;\ +\infty)$. **1012.** а) $\left(-\infty;\ \frac{2}{3}\right)$; б) $(6{,}5;\ +\infty)$; в) $(-\infty;\ 0)$; г) $\varnothing$; д) $(30;\ +\infty)$; е) $(14{,}6;\ +\infty)$; ж) $\left(2\frac{1}{7};\ 3\right)$; з) $(8;\ 11)$. **1013.** а) $(5;\ 27)$; б) $(3;\ +\infty)$; в) $(3;\ +\infty)$; г) $\left(\frac{2}{3};\ 2\right)$; д) $(-\infty;\ 0{,}7)$; е) $(11;\ +\infty)$. **1014.** а) $-3, -2, -1, 0, 1$; б) 3, 4, 5, 6; в) $-2, -1, 0, 1$; г) 4, 5, 6. **1015.** а) 4, 5, 6, 7, 8; б) 0, 1, 2, 3; в) 2, 3, 4, 5; г) 2. **1017.** а) При $a \geqslant 15$; б) при $a < 5{,}6$; в) при $a \geqslant 9$; г) при $a \geqslant 77$. **1018.** а) При $b \leqslant 5{,}6$; б) при $b \leqslant -4{,}4$. **1019.** а) $(-\infty;\ 6)$; б) $(-\infty;\ -4)$; в) $\left(-1\frac{1}{3};\ -\frac{1}{3}\right)$; г) $\left(\frac{1}{3};\ 1\frac{5}{7}\right)$. **1020.** а) $\varnothing$; б) $(56;\ +\infty)$;

в) $\left[16\frac{2}{3};\ +\infty\right)$; г) $\left[1\frac{5}{7};\ +\infty\right)$. **1021.** а) 2; б) −2; в) не существует; г) 19. **1022.** а) 2; б) 11; в) 4; г) 3. **1023.** $-0{,}5 < a < 2{,}5$. **1024.** $-\frac{15}{35} < b < -\frac{14}{35}$. **1025.** а) При $a < -11$; б) таких значений a не существует. **1026.** а) (2; 3); б) (−1; 2); в) [3; 6]; г) [−3,2; −2]. **1027.** а) (0,3; 1,8); б) (12; 20); в) [−2; −1]; г) $\left[2;\ 2\frac{3}{4}\right]$. **1028.** а) 2; б) 1, 2, 3, 4; в) 1; г) 0. **1029.** а) При $-4 \leqslant b \leqslant 2$; б) при $-11{,}5 < y < 3{,}5$. **1030.** а) 4, 5, 6; б) 4, 5, 6, 7, 8; в) 9, 10, 11, 12; г) −1, 0, 1. **1032.** а) (−0,3; 0,2); б) (−1; 0); в) ∅. **1033.** а) ∅; б) (1; 1,1); в) (−∞; −2); г) (4; +∞). **1034.** а) $a \leqslant -3\frac{2}{3}$; б) $a \leqslant 4$; в) $a \geqslant -3\frac{1}{3}$; г) $a \geqslant -0{,}5$. **1035.** 20. **1036.** 57 + 18. **1037.** Больше 18 см, но меньше 22 см. **1038.** Больше 29 см, но меньше 36 см. **1039.** Больше 38 км/ч, но меньше 54 км/ч. **1042.** 0, 1, 4, 7. **1043.** а) (4; 12); б) (−∞; 5) ∪ (11; +∞); в) (−∞; 7] ∪ ∪ [9; +∞); г) [3; 13]. **1044.** а) (3; 11); б) (−∞; −11) ∪ (1; +∞); в) [−22; 24]; г) (−∞; 31] ∪ [33; +∞); д) нет решений; е) x — любое число. **1045.** а) (−∞; 0,5); б) (0,5; +∞). **1046.** а) При $a \leqslant -3$; б) при $a \geqslant 0{,}3$. **1047.** а) $\left(-\infty;\ -\frac{7}{15}\right] \cup$ $\cup\ [1{,}8;\ +\infty)$; б) $\left(-\infty;\ -1\frac{1}{3}\right) \cup (1{,}5;\ +\infty)$; в) $\left(4\frac{2}{3};\ 10\right)$; г) $\left[2;\ 2\frac{4}{7}\right]$. **1048.** а) $\left(1;\ 2\frac{1}{3}\right) \cup \left(3;\ 4\frac{1}{3}\right)$; б) (−1; 1) ∪ (1,8; 3,8); в) [3; 5] ∪ [6; 8]; г) [4; 6] ∪ [9; 11]. **1049.** При $a \leqslant -3$. **1050.** а) [1; 2]; б) (0; 4); в) (1,5; 2); г) нет решений. **1051.** а) (−∞; −1) ∪ (1; +∞); б) (−1; 3); в) $\left(1 - \sqrt{7};\ 1 + \sqrt{7}\right)$; г) (−∞; −2) ∪ (−1; 0) ∪ (1; +∞). **1052.** а) 0; ±1; ±2; б) ±2; ±3; в) −4; −3; −2; −1; 0; г) −1; 0; 1; 2. **1053.** а) (−2; 2); б) (−∞; −4) ∪ (4; +∞). **1054.** 50 км/ч. **1055.** $\frac{a}{b}$. **1056.** 0; 1; $-\frac{1}{7}$. **1067.** Во второй день. **1068.** Пешеход, который шел с постоянной скоростью. **1074.** а) $\left(-\infty;\ 1\frac{10}{11}\right)$; б) (−6; +∞); в) $\left(\frac{2}{15};\ +\infty\right)$; г) $\left(-\infty;\ \frac{3}{4}\right)$; д) $\left(-\infty;\ 1\frac{1}{4}\right)$; е) (1,4; +∞). **1075.** а) 1; б) 0; в) 8; г) 9. **1076.** а) 8; б) −1; в) 7; г) 6. **1077.** а) При $a < 13\frac{1}{3}$; б) при $a > 13\frac{1}{3}$. **1078.** а) [1,3; 1,5]; б) [−15; 0]. **1079.** а) (0; 5); б) (0; 4). **1080.** а) (−1; 0); б) $\left(-\frac{7}{13};\ 0\right)$. **1081.** а) [4; 16]; б) [−20; 60]. **1082.** а) [−2; 6]; в) [0; 10]. **1083.** (2,5; 4). **1084.** [−2; −0,5). **1085.** а) (−1,5; −0,5); б) (−2; 0,5). **1086.** а) (2; 6); б) (0,1; 0,5). **1087.** а) (−4; −3) ∪ (3; 4); б) (−2; −1) ∪ (3; 4); в) [−1; 0] ∪ [1; 2]; г) $[-1;\ 0] \cup \left[1\frac{1}{3};\ 2\frac{1}{3}\right]$. **1088.** −2, −1, 2, 3. **1089.** а) При $a \leqslant 11$; б) при $a \leqslant -10$. **1091.** При $a > 3$. **1092.** Таких значений a не существует. **1093.** а) При $a \geqslant -2{,}8$; б) при $a \leqslant -4{,}5$. **1095.** а) [1; 2]; б) $\left(0;\ 2\frac{2}{3}\right]$; в) [−3; 7]; г) [−0,2; 1) ∪

$\cup$ (1; 3]. **1096.** 31, 32, 33, 34, 35. **1097.** Больше 4,5 км/ч, но меньше 6 км/ч. **1098.** а) (0; 4); б) $(-\infty; 1] \cup [3; +\infty)$; в) $(-\infty; -5) \cup (-1; +\infty)$; г) $[-4; 6]$. **1099.** -2; -1; 0; 2; 3.

Глава 6

1105. 0,0016, 0,008, 0,004, 0,2, 1,25, 3,125, 7,81125. **1106.** в) $\frac{1}{64}$; г) $-\frac{1}{32}$; д) 81; е) 15,625; и) $\frac{4}{9}$; к) $\frac{8}{125}$. **1107.** в) $-\frac{1}{25}$; г) $\frac{1}{32}$; д) $\frac{5}{6}$; е) $\frac{5}{36}$; ж) $\frac{4}{27}$; з) $\frac{9}{400}$. **1108.** а) 0,4; б) $\frac{1}{9}$; в) $-3\frac{22}{81}$; г) 15,05. **1111.** г) $\frac{x^3}{9y^4}$; д) $\frac{a}{b+c}$; е) $\frac{y}{(x+a)^2}$; ж) $\frac{1}{a^2b^2c^2}$; з) $\frac{x+y}{x-y}$. **1113.** а) $\frac{a+b}{ab}$; б) $\frac{y^2-x^2}{x^2y^2}$; в) $\frac{a^2+b^2}{ab}$; г) $\frac{c^3d^3-9}{c^2d^2}$; д) $\frac{x^3+y^3}{x^2y^2}$; е) $\frac{a^6-b^6}{a^4b^4}$. **1114.** 14. **1116.** 4 и 10 см. **1119.** а) 2,25; б) $\frac{1}{108}$; в) $\frac{4}{81}$; г) $-2,25$; д) 36; е) $\frac{4}{7}$. **1122.** а) 2^2; б) 2^{-9}; в) 2^2; г) 2^{-24}; д) 2^{-45}. **1123.** а) 3^{-4}; б) 3^{14}; в) 3^{-17}; г) 3^0. **1124.** а) 9^{18}; б) 27^{12}; в) 81^9; г) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-36}$; д) $\left(\frac{1}{9}\right)^{-18}$; е) $\left(\frac{1}{27}\right)^{-12}$. **1125.** а) $m = 1$; б) $m = 3$; в) $m = -4$; г) $m = 4$; д) $m = 1$; е) $m = 3$. **1126.** а) 3; б) 1; в) 16; г) 0,2; д) 92,16; е) $\frac{25}{49}$. **1128.** а) $20ab$; б) 0,4; в) $m^{10}n^{-7}$; г) $\frac{6}{17}a^{8n+1}b^{n+2}$; д) $3x^{n+4}y^7$; е) $5c^{n+2}$. **1129.** г) $81a^{24}b^{-32}$; д) $-8c^9b^{12}$; е) $5\frac{1}{16}c^{-20}b^8$; ж) $x^{4n}b^{-16}$; з) $y^{10n}a^{12n}$; и) $c^{2n}d^{-8n}$. **1130.** а) $(4a^{-1})^3$; б) $(0,01b^3)^2$; в) $\left(\frac{1}{2}x^2y^3\right)^7$; г) $(0,1x^3y^{-4})^6$; д) $(1,5c^{2n}d^{-n})^5$; е) $(2,3a^{-3n}b^{4n})^3$. **1131.** а) $\frac{a^{16}}{b^{13}}$; б) $\frac{1}{a^9}$; в) $\frac{80x^2}{y^6}$; г) $\frac{1}{36x^4}$. **1132.** $-3a$. **1134.** а) 3; б) 3. **1135.** а) $\frac{a^2+b^2}{ab}$; б) $\frac{1+a^3b^3}{ab}$; в) $\frac{a^2b-1}{ab}$; г) $\frac{b^2-a^2}{a^2}$; д) $\frac{1}{ab}$; е) $\frac{a^2b^2-1}{ab}$. **1137.** а) Нет; б) да. **1139.** а) x; б) x^2; в) $-\frac{1}{y}$; г) $\frac{1}{y^6}$; д) ab; е) $\frac{1}{a^4b^4}$. **1141.** Указание. Возведите обе части равенства $a + a^{-1} = b$ в куб: $a^3 + a^{-3} + 3(a + a^{-1}) = b^3$. Отсюда $a^3 + a^{-3} = b^3 - 3b$. **1142.** а) $\frac{1}{(a^2-b^2)^2}$; б) $\frac{y}{x}$; в) $\frac{a+b-1}{a+b+1}$; г) $\frac{(a-b)^2}{a-b-1}$; д) $\frac{a}{a+b}$; е) $\frac{n^2+1}{n^2-1}$. **1147.** а) $a = \frac{bc}{b+c}$; б) $b = \frac{ac}{c-a}$. **1150.** а) $n = 2$; б) $n = 4$; в) $n = -2$; г) $n = 4$. **1151.** а) x больше y в 100 раз; б) x больше y в 100 000 раз; в) x меньше y в 100 раз; г) x меньше y в 1 000 000 раз. **1152.** а) $4,2 \cdot 10^8$ г; б) $6,3 \cdot 10^6$ г; в) $3,6 \cdot 10^{-5}$ кг;

г) $1{,}28 \cdot 10^{-6}$ т; д) $2 \cdot 10^{-3}$ т; е) $4{,}2 \cdot 10^{0}$ ц. **1153.** а) $3{,}6 \cdot 10^{3}$ с; б) $8{,}64 \cdot 10^{4}$ с; в) $2{,}592 \cdot 10^{6}$ с; г) $3{,}1536 \cdot 10^{7}$ с. **1154.** а) $1{,}625 \cdot 10^{8}$; б) $3{,}6 \cdot 10^{3}$; в) $1{,}008 \cdot 10^{-7}$; г) $1{,}992 \cdot 10^{-3}$. **1155.** а) $1{,}980... \cdot 10^{-3}$; б) $7{,}384... \cdot 10^{-7}$. **1156.** На 6. **1160.** а) (2; 63); б) (14; $+\infty$). **1161.** а) [3; 6); б) $[4; 8) \cup (8; 9]$. **1166.** а) 5^{-n}; б) 5^{n}; в) 5^{-3n}. **1167.** а) $\frac{1}{4}$; б) 4; в) 25; г) 5. **1170.** а) $\frac{x+1}{x^2+x+1}$; б) $\frac{1}{y+1}$; в) $\frac{1}{(a-b)^2}$; г) $\frac{b-a}{ab}$. **1171.** 1,45. **1172.** а) 5^{n}; б) 2^{n}; в) $\frac{1}{3^{n}}$; г) 7^{2n}; д) a^{2n}; е) b^{4n}. **1176.** $\frac{1}{ab}$. **1177.** $\frac{a^3}{2(a-1)}$. **1178.** а) $a^{-4}b^{-1}$; б) $\frac{b^2-bc+c^2}{bc}$.

1179. а) В $4{,}04 \cdot 10^{5}$ раз; б) в $3{,}31 \cdot 10^{5}$ раз; в) в $3{,}05 \cdot 10^{6}$ раз; г) в $2{,}67 \cdot 10^{5}$ раз. **1180.** а) $7{,}84 \cdot 10^{3}$; б) $1{,}2 \cdot 10^{3}$; в) $6{,}28 \cdot 10^{4}$; г) $6{,}69 \cdot 10^{6}$. **1181.** а) 14; б) 8; в) 20; г) 7. **1182.** а) 33 или 34; б) 6 или 7.

Глава 7

1186. в) −2, 0, 2; г) нулей функции нет; д) ±1; е) ±1. **1187.** в) −3; −1; г) 1; 3. **1188.** в) $(-\infty; 0) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$; г) $(-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; +\infty)$; д) $(-\infty; -3] \cup [2; +\infty)$; е) $(-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$. **1189.** а) $f(x) = 0$ при $x = 0{,}2$, $f(x) < 0$ при $x \in [-2; 0{,}2)$, $f(x) > 0$ при $x \in (0{,}2; 2]$, $E(f) = [-11; 9]$; б) $f(x) = 0$ при $x = \frac{2}{3}$, $f(x) < 0$ при $x \in \left(\frac{2}{3}; 7\right]$, $f(x) > 0$ при $x \in \left[-4; \frac{2}{3}\right)$; $E(f) = [-19; 14]$; в) $f(x) = 0$ при $x = \frac{1}{2}$, $f(x) < 0$ при $x \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$, $f(x) > 0$ при $x \in \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$; $E(f) = (-\infty; +\infty)$; г) $f(x) = 0$ при $x = 0$, $f(x) > 0$ при $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; $E = [0; +\infty)$. **1190.** а) $a = 2{,}5$; б) $a = 6{,}5$. **1191.** а) $D(g) = [-7; 7]$, $E(g) = [-2; 2]$; б) $D(f) = [-6; 8]$, $E(f) = [-4; 4]$. **1192.** $D(y) = (-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (-2; +\infty)$, $E(y) = (-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; +\infty)$. **1194.** а) $x \in \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$; б) $y \in \{y \mid y \in Z, -9 \leqslant y \leqslant -1\}$. **1195.** а) Указание. $36^{11} + 1$ представьте в виде произведения. **1196.** а) 3; б) $\frac{1}{27}$. **1201.** а) 1; б) 4; в) 2; г) 1.

1204. а) $[4; +\infty)$; б) $\varnothing$. **1205.** а) $686a^{3-2m}$; б) $\frac{1}{4}b^{9m}$. **1218.** а) $x_1 = 1$, $x_2 = 4$; б) $x_1 = 0$, $x_2 = 3$; в) $x = 2$. **1219.** а) −3; б) −2, 4; в) −1, 1, 7; г) 0, 8; д) 10; е) $-\sqrt{5}$. **1220.** а) $(-\infty; -1)$; б) $[2; +\infty)$; в) $(3; +\infty)$. **1221.** а) При $n = -1$; б) при $n = -4$; в) при $n = -25$. **1222.** а) При $m = -1$ и $m = 1$; б) при $m = -2$ и $m = 2$; в) при $m = -3$ и $m = 3$. **1223.** При a, равном 0, 1, 4, 9, уравнение имеет целые корни, т. е. целыми корнями уравнения при $a < 10$ являются числа −6, −4, −2, 0, 2, 4, 6. **1224.** $\frac{7}{30}$, $\frac{11}{30}$, $\frac{13}{30}$, $\frac{17}{30}$, $\frac{19}{30}$. **1225.** $\frac{x+2y}{2}$.

1226. а) −11 и −10; б) −6 и −5. **1227.** б) $x = 100$, $x = 2{,}5$, $x = 0{,}125$, $x = 0{,}05$; в) $x \in (10; +\infty)$, $x \in (100; +\infty)$, $x \in (1000; +\infty)$, $x \in (0; 0{,}05)$, $x \in (0; 0{,}01)$. **1230.** а) При $x = 1$; при $x > 1$; при $0 < x < 1$; б) при $x = -1$; при $-1 < x < 0$; при $x < -1$. **1252.** $y = \frac{5}{x}$. **1260.** а) $D(f) = (-\infty; 5) \cup (5; +\infty)$, $E(f) = (-\infty; -2) \cup$

$\cup$ (2; $+\infty$); б) $D(f) = (-\infty; -6) \cup (-6; +\infty)$, $E(f) = (-\infty; -4) \cup (-4; +\infty)$. **1261.** а) $x = 7$, $y = -4$; б) $x = -8$, $y = 5$; в) $x = 4$, $y = 9$; г) $x = -5$, $y = -10$; д) $x = -2$, $y = \frac{1}{3}$; е) $x = \frac{1}{8}$; $y = -\frac{1}{4}$. **1266.** а) -1; 0; 3; б) -2; -1. **1267.** $(-6; 7)$, $(0; 1)$, $(2; 15)$, $(8; 9)$. **1270.** а) $a^2 - b^2$; б) $x^2 - y^2$. **1272.** а) $D(f) = (-\infty; -3) \cup (-3; 3) \cup (3; +\infty)$, $E(f) = [9; 18) \cup (18; +\infty)$; б) $D(f) = (-\infty; -5) \cup (-5; +\infty)$; $E(f) = (-\infty; -10) \cup (-10; +\infty)$. **1275.** $E(g) = \left[6; 6\frac{1}{4}\right]$. **1276.** а) При $x = -7$; б) при $x = -0{,}2$; в) при $x = 2\frac{5}{6}$; г) при $x = -7$. **1277.** а) $D(f) = [-6; -5]$; б) $f(-5) = -1$, $f(1) = 1$, $f(4) = 4$; в) $E(f) = [-2; 5]$; г) $f(x) = 0$ при $x = -4$, $f(x) = 2$ при $x = -2$ и $x = 0$, $f(x) = 3$ при $x = -1$ и при $x = 3$, $f(x) = 4$ при $x = 4$. **1278.** а) $D(g) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; б) $g(-4) = -1$, $g(-1) = \frac{1}{2}$, $g(2) = 0$, $g(4) = 1$; в) $E(g) = (-\infty; +\infty)$; г) $g(x) = -6$ при $x = -14$, $g(x) = 0$ при $x = -2$ и при $x = 2$, $g(x) = 1$ при $x = 4$, $g(x) = 6$ при $x = 14$. **1283.** а) $y = |x - 8|$; б) $y = |x - 1| + 7$; в) $y = |x| - 5$; г) $y = |x + 3| - 2$. Указание. Постройте график функции, заданной двумя выражениями, а затем подберите соответствующую формулу. **1284.** а) $a = -1$ или $a = 7$; б) $a = -4$ или $a = -2$. **1285.** $m = 10$, $n = 12$ или $m = 2$, $n = 12$. **1287.** а) $k = 6$, $b = 9$; б) $k = -18$, $b = -48$. **1288.** (3; 6). **1307.** $(-3; 8)$, $(3; 2)$, $(5; 16)$, $(11; 10)$. **1303.** а) $n = 2$; б) $n = 3$; в) $n = -1$; г) $n = 4$; д) $n = 4$; е) $n = -5$. **1308.** Это точка с координатами $x = 3$, $y = 1$. **1310.** (4; 1) и (1; 4).

Задачи повышенной трудности

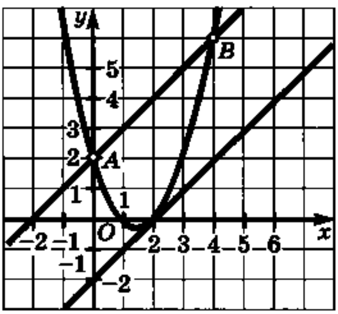
1311. б) $\frac{y+1}{y^2+y-2}$; в) $\frac{a^2+a+1}{a^3+1}$; г) $b^4 - b^2 + 1$. **1312.** а) $\frac{a-b-c}{a-b+c}$; б) $a + b + c$. Указание. Воспользуйтесь тождествами: $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)^3 - 3(a + b + c)(ab + bc + ca)$ и $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = (a + b + c)^2 - 3(ab + bc + ca)$; в) $\frac{n}{(x+1)(x+n+1)}$; г) $\frac{(a+b)^2}{a^3b^3}$; д) $\frac{x-y}{xy}$; е) x. **1313.** 9801. **1314.** Указание. Рассмотрите случаи, когда $n = 3k$, $n = 3k - 1$, $n = 3k + 1$. **1315.** 11, 12, 15. **1317.** Указание. Представьте каждую дробь-слагаемое в виде разности $\frac{1}{a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1}} - \frac{1}{a_1 + a_2 + \ldots + a_k}$, где $k = 1, 2, \ldots, n$. **1318.** Указание. Воспользуйтесь неравенством $x^2 + y^2 + z^2 \geqslant xy + yz + zx$. Имеем: $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ca$, $ab + bc + ca = \left(\sqrt{ab}\right)^2 + \left(\sqrt{bc}\right)^2 + \left(\sqrt{ca}\right)^2$, $\left(\sqrt{ab}\right)^2 + \left(\sqrt{bc}\right)^2 + \left(\sqrt{ca}\right)^2 \geqslant \sqrt{ab \cdot bc} + \sqrt{ab \cdot bc} + \sqrt{bc \cdot ca} + \sqrt{ca \cdot ab}$, $\sqrt{ab^2c} + \sqrt{abc^2} + \sqrt{a^2bc} = \sqrt{abc}\left(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}\right)$. Отсюда (по транзитивности):

$a^2+b^2+c^2 \geqslant \sqrt{abc}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)$. **1319.** б) Указание. Воспользовавшись неравенством $\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$, составьте $n-1$ неравенств: $\frac{1}{2^2}<\frac{1}{1}-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3^2}<\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4^2}<\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$, ..., $\frac{1}{(n-1)^2}<\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n-1}$, $\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$. Сложив эти неравенства почленно, получим $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<1-\frac{1}{n}<2$. **1320.** $x=6$, $x=3$. **1323.** Данное выражение после замены и упрощения примет вид: $\frac{|a^2-1|+(a^2-1)}{2a}=\begin{cases} a-1, \text{ если } a\geqslant 1,\\ \frac{1-a}{a}, \text{ если } 0<a<1.\end{cases}$ **1324.** $a+b$.

1325. а) $\sqrt{3}+\sqrt{2}-1$; б) $\sqrt{5}+\sqrt{2}-1$. **1326.** а) $\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}}>\sqrt{1{,}05}$; б) $\sqrt{9+4\sqrt{2}+4\sqrt{3}+2\sqrt{6}}>\sqrt{9+2\sqrt{3}+2\sqrt{5}+2\sqrt{15}}$. **1327.** Указание. Пусть $\sqrt{x}=a$, $\sqrt{y}=b$. Тогда выражение примет вид:

$$\sqrt{\frac{a^4+2a^2b^2+9b^4}{a^2-2ab+3b^2}-2b^2}=\sqrt{\frac{\left(a^2+3b^2\right)^2-4a^2b^2}{a^2-2ab+3b^2}-2b^2}=\sqrt{a^2+3b^2+2ab-2b^2}=$$

$=\sqrt{(a+b)^2}=a+b=\sqrt{x}+\sqrt{y}$. **1328.** 1. Указание. Перемножьте сначала 3-й и 4-й радикалы, затем результат умножьте на 2-й радикал и, наконец, произведение умножьте на 1-й радикал. **1329.** а) 1; 2; $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$; $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$. Указание. Воспользуйтесь подстановкой $x^2-3x=y$; б) -1; 7; в) 2; 6; $4-\sqrt{6}$; $4+\sqrt{6}$; г) -4; 1. **1330.** Указание. Допустим, что оба уравнения $x^2+px+q=0$ и $x^2+p_1x+q_1=0$ не имеют корней. Тогда $p^2-4q<0$ и $p_1^2-4q_1<0$. Сложив эти неравенства почленно, получим: $p^2+p_1^2-4q-4q_1<0$. Используя условие, что $pp_1=2(q+q_1)$, получим: $p^2+p_1^2-2pp_1<0$, т. е. что $(p-p_1)^2<0$. Пришли к противоречию. Следовательно, сделанное предположение, что ни одно из уравнений не имеет корней, неверно. Значит, хотя бы одно из уравнений имеет корни. **1331.** При $a=1$. **1332.** $a=-2{,}5$ и $a=1{,}5$. При $a=-2{,}5$ $x_1=-\frac{5}{2}$, $x_2=\frac{25}{4}$; при $a=1{,}5$ $x_1=-\frac{5}{2}$, $x_2=\frac{9}{4}$. **1333.** $m=1$ и $m=-\frac{7}{8}$. Указание. Пусть x_1— общий корень данных уравнений. Тогда верны равенства $x_1^2-(2m+1)\,x_1+m+1=0$ и $2x_1^2-(4m-1)\,x_1+1=0$. Умножив первое равенство на -2 и сложив его со вторым равенством, найдем, что $x_1 = \frac{2m+1}{3}$. Подставив значение x_1, например, в первое уравнение и решив его относительно m, найдем, что $m_1 = 1$, $m_2 = -\frac{7}{8}$. Соответствующие этим значениям параметров общие корни уравнений равны $x_1 = 1$ или $x_1 = -\frac{1}{4}$. **1334.** а) -6; 2; б) уравнение имеет бесконечное множество корней; корнем уравнения является любое число, принадлежащее промежутку $[-1; 1]$. **1335.** Система имеет единственное решение $x = \frac{6}{k+2}$, $y = \frac{3}{k+2}$, если $k \neq -2$ и $k \neq 2$. Условие, что $x > 1$ и $y > 0$, выполняется при $k \in (-2; 2) \cup (2; 4)$. При $k = 2$ система имеет бесконечное множество решений, которое с учетом условия, что $x > 1$ и $y > 0$, можно записать так: $\{(x; y) \mid 1 < x < 3,\ 0 < y < 1\}$. **1336.** Точка дуги AB параболы, наиболее удаленная от прямой $y = x + 2$, имеет координаты $x = 2$, $y = 0$. Указание. Надо найти прямую, параллельную прямой $y = x + 2$ и касающуюся параболы $y = x^2 - 3x + 2$. Она имеет вид $y = x + b$. Уравнение $x^2 - 3x + 2 = x + b$ имеет единственное решение, если $D = 0$ (в этом случае прямая и парабола имеют единственную точку). Отсюда $b = -2$. Искомое расстояние равно ширине полосы, образованной прямыми $y = x + 2$ и $y = x - 2$ (см. рисунок).



1337. а) $x_1 = -\sqrt{10}$, $x_2 = \sqrt{10}$; б) $x_1 = -2\sqrt{2}$, $x_2 = 0$; $x_3 = 2\sqrt{2}$; в) $x_1 = -\sqrt{6}$, $x_2 = -\sqrt{2}$, $x_3 = \sqrt{2}$, $x_4 = \sqrt{6}$; г) $x_1 = -2$; $x_2 = 2$. **1338.** Указание. Представьте выражение $7^{2n} - y^{2n} - 297$ в виде $(49^n - 16^n) + (-33 - 264)$. Затем выполните преобразования: $(49^n - 16^n) = (49 - 16) \cdot A$, где $A = 49^{n-1} + 49^{n-2} \cdot 16 + \ldots + 16^{n-1}$; $49^n - 16^n - 33 - 264 = (33A - 33) - 264 = 33(A - 1) - 264$. Далее докажите, что $A - 1$ кратно 8. **1340.** б) Указание. Воспользуйтесь неравенством $\frac{1}{\sqrt{n}} < \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$, составив n неравенств: $\frac{1}{\sqrt{1}} < \sqrt{2} - \sqrt{0}$, $\frac{1}{\sqrt{2}} < \sqrt{3} - \sqrt{1}$, $\frac{1}{\sqrt{3}} < \sqrt{4} - \sqrt{2}$, …, $\frac{1}{\sqrt{n-2}} < \sqrt{n-1} - \sqrt{n-3}$, $\frac{1}{\sqrt{n-1}} < \sqrt{n} - \sqrt{n-2}$, $\frac{1}{\sqrt{n}} < \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$. Почленно сложив их, получим: $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n}} < \sqrt{n} + \sqrt{n+1} - 1$. **1341.** Указание. Если a и b разных знаков или одно из них равно нулю, то a или b по модулю больше или равно 1. Тогда неравенство $a^4 + b^4 \geqslant \frac{1}{8}$ очевидно. Остается случай, когда $a > 0$ и $b > 0$. Учитывая это, воспользуемся неравенством $\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}$ или $ab \leqslant \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$. Отсюда $ab \leqslant \frac{1}{4}$. Выполним преобразование (учитывая, что $a + b = 1$): $a^4 + b^4 = (a + b)^4 - 4ab^3 - 4a^3b - 6a^2b^2 = 1 - 4ab(a^2 + b^2) - 6a^2b^2 = 1 - 4ab\,((a + b)^2 - 2ab) - 6a^2b^2 = 1 - 4ab(1 - 2ab) - 6a^2b^2 = 1 - 4ab + 2a^2b^2 = 1 + 2\,(a^2b^2 - 2ab + 1) - 2 = 2(ab - 1)^2 - 1$. Так как $ab \leqslant \frac{1}{4}$, то $2(ab - 1)^2 - 1 \leqslant 2\left(\frac{1}{4} - 1\right)^2 - 1 = \frac{1}{8}$. Значит, $a^4 + b^4 \geqslant \frac{1}{8}$. **1344.** $f(0) = 1$; $f(-x) = \frac{1}{f(x)}$. **1345.** $g(0) = 0$; $g(-x) = -g(x)$; $g(x) = kx$. **1346.** За 3 ч, 6 ч, 5 ч. **1347.** 30 км. **1348.** 70 кг и 140 кг. **1349.** а) $\frac{2v_1v_2}{v_1 + v_2}$; б) $\frac{3v_1v_2}{2v_1 + v_2}$. **1350.** 248. **1351.** 8281.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ПРИЛОЖЕНИЕ

МЕТОДИЧЕСКИЕ КОММЕНТАРИИ ДЛЯ УЧИТЕЛЯ

Данная книга продолжает учебник «Алгебра—7» для учащихся школ и классов с *углубленным* изучением математики. Содержание всего курса алгебры для 7—9-го классов, и учебника «Алгебра—8» в частности, полностью соответствует современным образовательным стандартам, включая широкий круг дополнительных вопросов. Подробные объяснительные тексты учебника позволяют учащимся успешно изучать материал даже самостоятельно, а большое количество практического материала — прочно отрабатывать приемы решения различных задач, среди которых немало задач повышенной сложности.

Методической особенностью курса является *расширение традиционных учебных тем* за счет теоретико-множественной, вероятностно-статистической и историко-культурной линий. Обращение к теоретико-множественному подходу в изложении некоторых вопросов связано не только с программой изучения математики на профильном уровне, но и с удобством такого подхода при введении, например, функции как соответствия между множествами, равносильности уравнений и т. п. Новые стандарты математического образования заставляют иначе взглянуть на статистику, комбинаторику и теорию вероятностей. Этот материал, достаточно подробно изложенный в учебниках для 7—9-го классов, не должен вызвать затруднений у учащихся.

Специфической особенностью всех учебников линии является введение в объяснительные тексты исторического материала, а в практическую часть — задач из далекого прошлого. Авторы уверены, что наличие элементов историзма сделает учебник более привлекательным для учащихся, даст возможность учителю чаще обращать внимание школьников на общекультурное значение математики.

Учебник «Алгебра—8» содержит самые разнообразные упражнения. Учитель, учитывая возможности класса, может часть задач пропустить, может предложить выполнить некоторые задания сильным учащимся дома или на уроке. К этим задачам можно будет вернуться позже, во время итогового повторения. Добавим, что количество задач учебника чаще всего избыточное, и для формирования у школьников стойких умений и навыков решение всех задач не обязательно.

Примерное поурочное планирование, рассчитанное на **5 уроков алгебры в неделю** и приводимое ниже, призвано помочь учителю в планировании изучения материала в 8-м классе. Обращаем внимание учителя на то, что в планировании не предусмотрен резерв времени: учебный материал равномерно распределен по главам. После изучения каждой главы предполагается один урок отводить на решение дополнительных заданий к изученной главе, один урок — на подготовку к контрольной работе.

ПРИМЕРНОЕ ПОУРОЧНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ

5 часов в неделю, всего 170 часов

№ урока	Изучаемый материал	Кол-во часов
	Повторение материала 7-го класса (6 ч)	
1	Многочлены, действия с многочленами, формулы сокращенного умножения	1 ч
2	Разложение на множители: вынесение за скобку, группировка	1 ч
3	Уравнения, решение уравнений разложением на множители	1 ч
4	Функции и их графики. Уравнение с двумя переменными и их графики	1 ч
5	Системы линейных уравнений и методы их решения	1 ч
6	*Самостоятельная работа № 1* (повторение)	1 ч
	Глава 1. Дроби (23 ч)	
	§ 1. Дроби и их свойства (5 ч)	
7, 8	Числовые дроби и дроби, содержащие переменные (п. 1)	2 ч
9, 10	Свойства дробей (п. 2)	2 ч
11	*Самостоятельная работа № 2* (§ 1)	1 ч
	§ 2. Сумма и разность дробей (6 ч)	
12—14	Сложение и вычитание дробей (п. 3)	3 ч
15, 16	Представление дроби в виде суммы дробей (п. 4)	2 ч
17	*Самостоятельная работа № 3* (§ 2)	1 ч
	§ 3. Произведение и частное дробей (12 ч)	
18, 19	Умножение дробей. Возведение дроби в степень (п. 5)	2 ч
20, 21	Деление дробей (п. 6)	2 ч
22	*Самостоятельная работа № 4* (§ 3)	1 ч
23—25	Преобразование рациональных выражений (п. 7)	3 ч
26	*Самостоятельная работа № 5* (§ 3)	1 ч

Продолжение табл.

№ урока	Изучаемый материал	Кол-во часов
27, 28	Решение дополнительных упражнений к главе 1	2 ч
29	*Контрольная работа № 1* (глава 1)	1 ч
Глава 2. Целые числа. Делимость чисел (19 ч)		
	§ 4. Множество натуральных и множество целых чисел (5 ч)	
30, 31	Пересечение и объединение множеств (п. 8)	2 ч
32	Взаимно однозначное соответствие (п. 9)	1 ч
33	Натуральные числа. Целые числа (п. 10)	1 ч
34	*Самостоятельная работа № 6* (§ 4)	1 ч
	§ 5. Делимость чисел (14 ч)	
35	Свойства делимости (п. 11)	1 ч
36, 37	Делимость суммы и произведения (п. 12)	2 ч
38	*Самостоятельная работа № 7* (§ 5)	1 ч
39, 40	Деление с остатком (п. 13)	2 ч
41, 42	Признаки делимости (п. 14)	2 ч
43, 44	Простые и составные числа (п. 15)	2 ч
45	*Самостоятельная работа № 8* (§ 5)	1 ч
46, 47	Решение дополнительных упражнений к главе 2	2 ч
48	*Контрольная работа № 2* (глава 2)	1 ч
Глава 3. Действительные числа. Квадратный корень (29 ч)		
	§ 6. Множество рациональных и множество действительных чисел (10 ч)	
49, 50	Рациональные числа (п. 16)	2 ч
51, 52	Действительные числа (п. 17)	2 ч
53, 54	Числовые промежутки (п. 18)	2 ч
55	Интервальный ряд данных (п. 19)	1 ч
56, 57	Абсолютная и относительная погрешность (п. 20)	2 ч
58	*Самостоятельная работа № 9* (§ 6)	1 ч
	§ 7. Арифметический квадратный корень. Функция $y = \sqrt{x}$ (6 ч)	
59, 60	Арифметический квадратный корень (п. 21)	2 ч
61, 62	Вычисление и оценка значений квадратных корней (п. 22)	2 ч
63	Функция $y = \sqrt{x}$ и ее график (п. 23)	1 ч
64	*Самостоятельная работа № 10* (§ 7)	1 ч

Продолжение табл.

№ урока	Изучаемый материал	Кол-во часов
	§ 8. Свойства арифметического квадратного корня (13 ч)	
65—67	Квадратный корень из произведения, дроби и степени (п. 24)	3 ч
68—70	Преобразование выражений, содержащих квадратные корни (п. 25)	3 ч
71	*Самостоятельная работа № 11* (§ 8)	1 ч
72, 73	Преобразование двойных радикалов (п. 26)	2 ч
74	*Самостоятельная работа № 12* (§ 8)	1 ч
75, 76	Решение дополнительных упражнений к главе 3	2 ч
77	*Контрольная работа № 3* (глава 3)	1 ч
	Глава 4. Квадратные уравнения (32 ч)	
	§ 9. Квадратное уравнение и его корни (13 ч)	
78, 79	Определение квадратного уравнения. Неполные квадратные уравнения (п. 27)	2 ч
80—83	Формулы корней квадратного уравнения (п. 28)	4 ч
84	*Самостоятельная работа № 13* (§ 9)	1 ч
85, 86	Уравнения, сводящиеся к квадратным (п. 29)	2 ч
87—89	Решение задач с помощью квадратных уравнений (п. 30)	3 ч
90	*Самостоятельная работа № 14* (§ 9)	1 ч
	§ 10. Свойства корней квадратного уравнения (8 ч)	
91—93	Теорема Виета (п. 31)	3 ч
94, 95	Выражения, симметрические относительно корней квадратного уравнения (п. 32)	2 ч
96, 97	Разложение квадратного трехчлена (п. 33)	2 ч
98	*Самостоятельная работа № 15* (§ 10)	1 ч
	§ 11. Дробно-рациональные уравнения (11 ч)	
99—101	Решение дробно-рациональных уравнений (п. 34)	3 ч
102	*Самостоятельная работа № 16* (§ 11)	1 ч
103—105	Решение задач с помощью уравнений (п. 35)	3 ч
106	*Самостоятельная работа № 17* (§ 11)	1 ч
107, 108	Решение дополнительных упражнений к главе 4	2 ч
109	*Контрольная работа № 4* (глава 4)	1 ч

Продолжение табл.

№ урока	Изучаемый материал	Кол-во часов
	Глава 5. Неравенства (21 ч)	
	§ 12. Числовые неравенства и неравенства с переменными (8 ч)	
110	Сравнение чисел (п. 36)	1 ч
111, 112	Свойства числовых неравенств (п. 37)	2 ч
113, 114	Оценка значений выражений (п. 38)	2 ч
115, 116	Доказательство неравенств (п. 39)	2 ч
117	*Самостоятельная работа № 18* (§ 12)	1 ч
	§ 13. Решение неравенств с одной переменной и их систем (13 ч)	
118—120	Решение неравенств с одной переменной (п. 40)	3 ч
121	*Самостоятельная работа № 19* (§ 13)	1 ч
122—124	Решение систем неравенств с одной переменной (п. 41)	3 ч
125, 126	Решение простейших неравенств с модулем (п. 42)	2 ч
127	*Самостоятельная работа № 20* (§ 13)	1 ч
128, 129	Решение дополнительных упражнений к главе 5	2 ч
130	*Контрольная работа № 5* (глава 5)	1 ч
	Глава 6. Степень с целым показателем (12 ч)	
	§ 14. Степень с целым показателем и ее свойства (5 ч)	
131, 132	Определение степени с целым отрицательным показателем (п. 43)	2 ч
133, 134	Свойства степени с целым показателем (п. 44)	2 ч
135	*Самостоятельная работа № 21* (§ 14)	1 ч
	§ 15. Выражения, содержащие степени с целыми показателями (7 ч)	
136, 137	Преобразование выражений, содержащих степени с целыми показателями (п. 45)	2 ч
138	Стандартный вид числа (п. 46)	1 ч
139	*Самостоятельная работа № 22* (§ 15)	1 ч
140, 141	Решение дополнительных упражнений к главе 2	2 ч
142	*Контрольная работа № 6* (глава 6)	1 ч

Окончание табл.

№ урока	Изучаемый материал	Кол-во часов
	Глава 7. Функции и графики (17 ч)	
	§ 16. Преобразование графиков функций (6 ч)	
143, 144	Функция, область определения и область значений функции (п. 47)	2 ч
145	Растяжение и сжатие графиков (п. 48)	1 ч
146, 147	Параллельный перенос графиков функций (п. 49)	2 ч
148	*Самостоятельная работа № 23* (§ 16)	1 ч
	§ 17. Свойства и графики некоторых функций (11 ч)	
149, 150	Функции $y = x^{-1}$ и $y = x^{-2}$ (п. 50)	2 ч
151, 152	Обратная пропорциональность и ее график (п. 51)	2 ч
153—155	Дробно-линейная функция и ее график (п. 52)	3 ч
156	*Самостоятельная работа № 24* (§ 17)	1 ч
157, 158	Решение дополнительных упражнений к главе 7	2 ч
159	*Контрольная работа № 7* (глава 7)	1 ч
	Итоговое повторение (11 ч)	
160, 161	Преобразование рациональных выражений (глава 1)	2 ч
162	Делимость целых чисел (глава 2)	1 ч
163	Арифметические квадратные корни (глава 3)	1 ч
164	Квадратные уравнения (глава 4)	1 ч
165	Дробно-рациональные уравнения (глава 4)	1 ч
166	Неравенства и их системы (глава 5)	1 ч
167	Степень с целым показателем (глава 6)	1 ч
168	Функции и их графики (глава 7)	1 ч
169, 170	*Итоговая контрольная работа № 9*	2 ч

Авторы с благодарностью воспримут все замечания и предложения, имеющие целью улучшение содержания учебника. Их можно отправить как в издательство «Мнемозина», так и непосредственно авторам по электронной почте: feoktistov_ie@rambler.ru

ОГЛАВЛЕНИЕ